

文章编号: 1001-3806(2003)01-0026-03

## 贝塞尔光束通过光阑-透镜分离系统的焦移\*

彭润伍 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 利用 Collins 衍射积分公式推导了贝塞尔光束通过光阑-透镜分离系统后的轴上光强分布公式, 并详细分析了这一情况下的焦移。依赖于光阑-透镜的分离程度其相对焦移可能相反。

关键词: 贝塞尔光束; 焦移; 光阑-透镜分离系统

中图分类号: TN012 文献标识码: A

## Focal shift in Bessel beams focused by an aperture-lens separation system

Peng Runwu, Lü Baida

(Institute of Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

**Abstract:** In the paper, the expression for axial intensity distribution of Bessel beams passing through an aperture-lens separation system is derived based on Collins formula. The focal shift may be reversed, depending on the aperture-lens separation.

**Key words:** Bessel beam; focal shift; aperture-lens separation system

### 引言

自从 Durnin 等人提出了无衍射的贝塞尔光束后, 已有许多学者对贝塞尔光束的传输和变换性质进行了研究<sup>[1-9]</sup>。但讨论贝塞尔光束通过光阑-透镜系统的文献较少<sup>[7,9]</sup>。作者研究了贝塞尔光束通过光阑-透镜分离系统的特性。从 Collins 公式出发, 推导出了贝塞尔光束通过光阑-透镜分离系统后的轴上光强分布的解析表达式以及焦移公式。进行数值计算画出了相对焦移随相关参数变化的曲线。对影响相对焦移的物理参数作了分析。

### 1 聚焦贝塞尔光束的光强分布

如图 1 所示, 设在光阑入射面处有一形如:

$$U_0(r) = A_0 J_0(\alpha r) \quad (1)$$

的贝塞尔光束通过光阑后再被一距离光阑  $s$  处的透镜聚焦。其中  $a$  是光阑的半径,  $f$  是透镜的焦距,  $A_0$  是常数,  $r$  是半径,  $J_0$  是第 I 类零阶贝塞尔函数,  $\alpha$  是与  $z$  轴垂直的波矢部分。

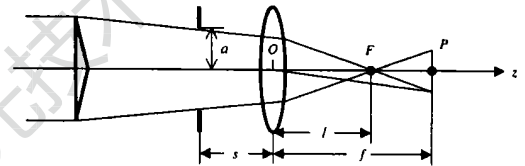


Fig. 1 Propagation of Laguerre-Gaussian beam passing through an aperture-lens separated system

由 Collins 衍射积分公式得聚焦场分布为<sup>[9,12]</sup>:

$$U(r') = \frac{ik}{B} \exp[-ik(s+l)] \int_0^a U_0(r) \times \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ar^2 + Dr'^2)\right] J_0\left(\frac{kr r'}{B}\right) r dr \quad (2)$$

式中,  $l$  是透镜到考察点  $P$  的传输距离,  $k = 2\pi/\lambda$  是波数。从光阑到考察点  $P$  的变换矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z & f[1 + (1-s/f)\Delta z] \\ -1/f & 1-s/f \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中,  $\Delta z = (l-f)/f$ 。现在讨论轴上情况, 即  $r' = 0$ , 则:

$$U(0) = 2iA_0 \left[ \pi N_a - u \left( 1 - \frac{s}{f} \right) \right] \exp[-ik \times (s+l)] \int_0^1 \exp(iur^2) J_0 \left[ \left( \frac{N_a}{N_a} \right)^{1/2} r \right] r dr \quad (4)$$

式中,  $N_a = \frac{a^2}{\lambda f}$ ,  $N_a = \frac{1}{\lambda f a^2}$ ,

$$u = \frac{k}{2} \frac{a^2(l/f - 1)}{(1-l/f)s + l} = \frac{\pi N_a \Delta z}{1 + (1-s/f)\Delta z} \quad (5)$$

\* 激光技术国家重点实验室资助项目。

作者简介: 彭润伍, 男, 1971 年 5 月出生。硕士研究生。从事光传输与变换的研究。

收稿日期: 2001-11-15; 收到修改稿日期: 2002-04-10

利用贝塞尔函数公式:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x),$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x) \quad (6)$$

对(4)式积分得:

$$U(0) = -\frac{A_0[\pi N_a - u(1-s/f)]}{u} \exp[-ik \times (s+l)] \exp(iu)(S_1 - iS_2), \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| < 1 \quad (7a)$$

$$U(0) = -\frac{A_0[\pi N_a - u(1-s/f)]}{u} \exp[-ik \times (s+l)] \exp\left[-\frac{ia^2\alpha^2}{u}\right] - \exp(iu)(S_3 - iS_4), \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| > 1 \quad (7b)$$

由  $I(0) = U(0) U^*(0)$  得:

$$I(0) = -\frac{|A_0|^2[\pi N_a - u(1-s/f)]^2}{u^2} \times (S_1^2 + S_2^2), \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| < 1 \quad (8a)$$

$$I(0) = -\frac{|A_0|^2[\pi N_a - u(1-s/f)]^2}{u^2} \times \left[1 - 2S_3 \cos\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) + 2S_4 \sin\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) + S_3^2 + S_4^2\right], \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| > 1 \quad (8b)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2u/a\alpha)^{2n} J_{2n}(a\alpha) \\ S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2u/a\alpha)^{2n-1} J_{2n-1}(a\alpha) \\ S_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a\alpha/2u)^{2n} J_{2n}(a\alpha) \\ S_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a\alpha/2u)^{2n+1} J_{2n+1}(a\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式是诺梅函数<sup>[6]</sup>。

## 2 贝塞尔光束的焦移

轴上光强极大值点满足方程:

$$\frac{dI(0)}{dl} = \frac{dI(0)}{du} \frac{du}{dl} = 0 \quad (10)$$

把(8)式代入(10)式并整理得:

$$S_1 \frac{dS_1}{du} + S_2 \frac{dS_2}{du} - \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{\pi N_a - u(1-s/f)}\right] \times (S_1^2 + S_2^2) = 0, \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| < 1 \quad (11a)$$

$$\left[1 - \frac{\alpha^2 a^2}{4u^2}\right] \left[S_3 \sin\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) + S_4 \cos\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right)\right] +$$

$$S_3 \frac{dS_3}{du} + S_4 \frac{dS_4}{du} + \frac{dS_4}{du} \sin\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) - \frac{dS_3}{du} \cos\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) - \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{\pi N_a - u(1-s/f)}\right] \times$$

$$\left[1 - 2S_3 \cos\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) + 2S_4 \sin\left(u + \frac{\alpha^2 a^2}{4u}\right) + S_3^2 + S_4^2\right] = 0, \quad \left|\frac{2u}{a\alpha}\right| > 1 \quad (11b)$$

上式即光强极大值点位置  $l_{max}$  满足的方程。解(11)式或对(8)式进行数值计算可获得  $l_{max}$  的值。利用图1亦可得出:

$$l_{max} = \frac{f}{1 + [2\pi(N_a N_\alpha)]^{1/2} - s/f} \quad (12)$$

相对焦移为:

$$\Delta z = \frac{l_{max} - f}{f} = -\frac{1}{1 - s/f + 2\pi(N_a N_\alpha)^{1/2}} \quad (13)$$

## 3 讨论

从(13)式可以看出,  $\Delta z$  既可大于0也可小于0, 即轴上光强极大值点不在几何焦点上, 而总是有位置偏移, 这个

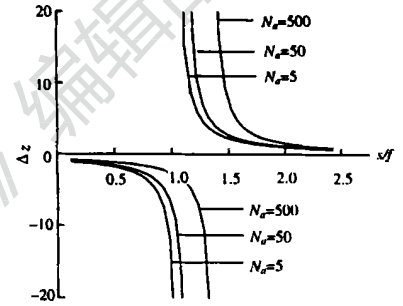


Fig. 2 The relative focal shift  $\Delta z$  varies with  $s/f$  ( $N_\alpha = 6 \times 10^{-6}$ )

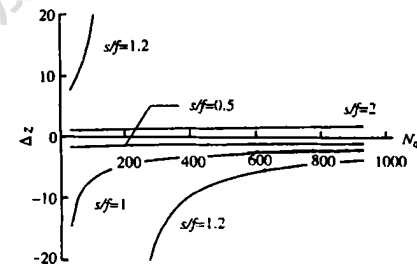


Fig. 3 The relative focal shift  $\Delta z$  varies with  $N_a$  ( $N_\alpha = 6 \times 10^{-6}$ )

偏移既可朝向透镜, 也可远离透镜。从(13)式还可知,  $\Delta z$  是  $s/f$ ,  $N_a$  和  $N_\alpha$  的函数, 其具体数值由这三个参数确定。

利用数值计算得出  $\Delta z$  与  $s/f$ ,  $N_a$  和  $N_\alpha$  的关系示于图2~图5。

研究(13)式和图4可以得出, 理论上  $s/f = 1 + 2\pi(N_a N_\alpha)^{1/2}$  处的焦移为无穷大。以  $s/f = 1 + 2\pi(N_a N_\alpha)^{1/2}$  为分界点, 对于确定的  $N_a$  和  $N_\alpha$  值, 在  $s/f < 1 + 2\pi(N_a N_\alpha)^{1/2}$  的区域内  $\Delta z < 0$ , 即此时光强极大值点比几何焦点更靠近透镜, 而在  $s/f > 1 + 2\pi(N_a N_\alpha)^{1/2}$  的区域内  $\Delta z > 0$ , 即光强极大值点远离透镜。

从图中可得出  $\Delta z$  与  $s/f$ ,  $N_a$  和  $N_\alpha$  的具体变化

关系。对于确定的  $s/f$ , 当  $\Delta z < 0$  时,  $|\Delta z|$  随  $N_a$  和  $N_a$  的增大而减小, 随  $N_a$  和  $N_a$  的减小而增大。当  $\Delta z > 0$  时,  $|\Delta z|$  随  $N_a$  和  $N_a$  的增大而增大, 随  $N_a$  和  $N_a$  的减小而减小。对于确定的  $N_a$  和  $N_a$ ,  $\Delta z$  与  $s/f$  的关系则相反, 当  $\Delta z < 0$  时,  $|\Delta z|$  随  $s/f$  增大而增大, 随  $s/f$  的减小而减小。当  $\Delta z > 0$  时,  $|\Delta z|$  随  $s/f$  的增大而减小, 随  $s/f$  的减小而增大。在  $N_a$  值确定的情况下,  $\Delta z < 0$  与  $\Delta z > 0$  的分界点随  $N_a$  的增大向  $s/f$  值增大的方向移动, 随  $N_a$  的减

小向  $s/f$  值减小的方向移动。当  $N_a \rightarrow \infty$  时,  $\Delta z = 0$ , 则  $l_{max} = f$ , 即光强极大值点与几何焦点处于同一位置。对  $N_a \rightarrow \infty$  的情况, 文献[7], [9]中有详细讨论。

当  $s/f = 0$ , 即光阑在透镜平面上时, 相对焦移为: 
$$\Delta z = - [1 + 2\pi(N_a N_a)^{1/2}]^{-1} \quad (14)$$
 这一结果与文献[7], [9]的结果是一致的。

### 4 小结

利用 Collins 衍射积分公式推导了贝塞尔光束通过光阑-透镜分离系统后的光强分布, 得到了这一情况下的光强分布的解析表达式以及焦移公式。由于光阑-透镜分离, 其相对焦移既可大于 0 也可小于 0, 并且相对焦移  $\Delta z$  在大于 0 和小于 0 不同区域随  $s/f$ ,  $N_a$  和  $N_a$  的具体变化有不同。当光阑透镜处于同一平面, 即  $s/f = 0$  时, 就回到了文献[7], [9]的结果。文献[7], [9]中已有结果可以作为本文中讨论的特例得到。

### 参考文献

- [1] Lin Y, Seka W, Eberly J H *et al.* Appl Opt, 1992, 31: 2708~ 2713.
- [2] Rosen J. Opt Lett, 1994, 19: 369~ 371.
- [3] Vicari L. Opt Commun, 1989, 70: 263~ 266.
- [4] 吕百达, 张彬. 光学学报, 1993, 13: 840~ 844.
- [5] Blotisi F, Vicari L. J Opt, 1991, 22: 3~ 5.
- [6] 张彬, 吕百达. 激光技术, 1996, 20: 14~ 19.
- [7] Lü B D, Huang W, Zhang B *et al.* Opt Commun, 1996, 131: 223~ 228.
- [8] Lü B D, Huang W. Opt Commun, 1994, 109: 43~ 46.
- [9] 吕百达. 强激光的传输与控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [10] Wenzel R G. J O S A, 1987, A 4: 340~ 345.
- [11] Liand Y, Wolf E. Opt Commun, 1981, 39: 211~ 215.
- [12] Bornand M, Wolf E. Principle of optics. 6th ed, Oxford and New York: Pergamon Press, 1980.

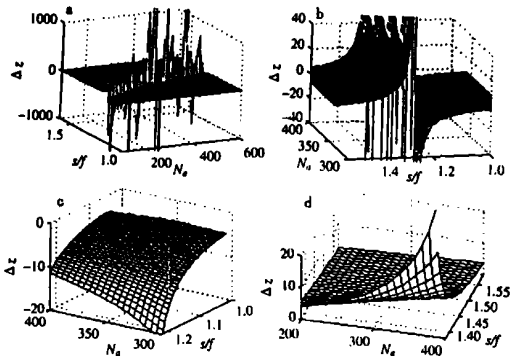


Fig. 4 The relative focal shift  $\Delta z$  varies with  $s/f$  and  $N_a$  ( $N_a = 6 \times 10^{-6}$ )

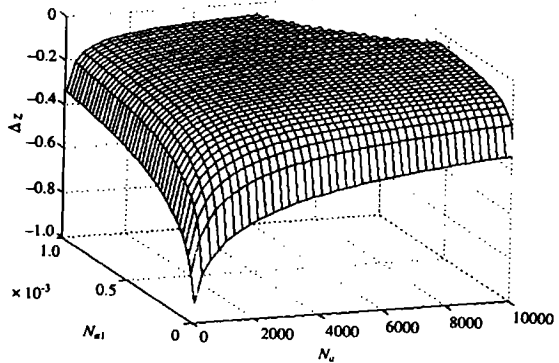


Fig. 5 The relative focal shift  $\Delta z$  varies with  $N_a$  and  $N_a$  ( $s/f = 0.1$ )

(上接第 25 页)

图 4a 为相对光强分布, 虚线和实线分别对应频域与空域 Collins 公式的计算结果, 图 4b 为相应的计算误差。由图 4b 可知, 拉盖尔高斯光束在自由空间中传输, 用频域与空域 Collins 公式的计算结果一致。

### 3 结论

用频域 Collins 公式和汉克尔变换研究了平顶高斯光束、贝塞尔-超高斯光束经硬边光阑, 以及拉盖尔高斯光束经自由空间和硬边光阑的传输特性, 并与空域 Collins 公式积分结果作了比较。用频域 Collins 公式与空域 Collins 公式所得结果在误差范

围内一致。用频域 Collins 公式和汉克尔变换研究光束的传输特性具有快速精确的优点。类似于空域中  $B = 0$  的情况, 在频域中当  $C = 0$  时传输公式变得非常简单, 称为频域成像公式。

### 参考文献

- [1] Collins S A. J O S A, 1970, 60: 1168~ 1177.
- [2] Liu Z Y, Wu X Y, Fan D Y. Opt Commun, 1998, 155: 7~ 11.
- [3] 吕百达. 强激光的传输与控制. 北京: 国防工业出版社, 1999: 23, 28.
- [4] Ibnchaikh M, Belafhal A. Phys Chem New, 2001, 2(1): 29~ 34.
- [5] Gori F. Opt Commun, 1994, 107: 335~ 341.
- [6] Bagni V, Borghi R, Gori F. J O S A, 1996, 13(7): 1385~ 1394.
- [7] Carno C F R, Potviliegl R M. Opt Commun, 1999, 164: 83~ 93.