文章编号: 1001-3806(2003)01-0019-02

双轴晶两类光轴方向的理论分析

薛　冬　李国华
(曲阜师范大学激光研究所, 曲阜, 273165)

摘要: 用几何作图和理论推导方法, 求得在双轴晶体中光轴与光线轴方向。

关键词: 双轴晶; 光轴; 光线轴
中图分类号: O734　　文献标识码: A

Theoretical analysis of the direction of the optical axis

Xue Dong, Li Guohua
(Laser Research Institute, Qufu Normal University, Qufu, 273165)

Abstract: Based on geometric construction and theoretical derivation, the directions of the two kinds of optical axes in the biaxial crystal have been deduced.

Key words: biaxial; optical axis; ray axis

引　言

光线与光波是有区别的。光的电磁振动在空间或介质中传播, 谓之光波。光波的传播方向是指它的波法线方向 k。光线方向则表示能量传递的方向 t。光在非均质体中要发生双折射现象。在双轴晶体中, 波法线 k 沿第 I 类光轴(光轴) 方向时, 只有一个折射率。光线方向 t 沿第 II类光轴(光线轴) 方向时, 只有一个光线折射率。常见文献中对第 I 类光轴的论述较多, 第 II类光轴较少提及, 作者试用几何作图和理论推导方法, 分别求得在双轴晶体中两类光轴的方向。

1　第 I 类光轴的几何方法推导

现以正二轴晶为例进行讨论($n_3 > n_2 > n_1$, $n_3 - n_2 > n_2 - n_1$), 其光率体如图 1 所示[1], 负二轴晶推导与此类似。由光率体模型可知, 当光波法线沿某一方向时, 与其垂直的中心切面为一圆切面, 其半径为 n_2, 这时可以方便地从 $n_1 n_3$ 主切面中求出光轴的方向: 取 n_1, n_2, n_3 的方向分别为 x, y, z 轴, 则图 1b 中椭圆方程为$(x^2/n_1^2) + (z^2/n_3^2) = 1$, 而椭圆与圆切面的 4 个交点在圆$(x^2/n_2^2) + (z^2/n_2^2) = 1$ 上, 这样, 两式联立由$(x^2/n_1^2) + (z^2/n_3^2) = (x^2/n_2^2) + (z^2/n_2^2)$ 得到图 1b 中所示圆切面的斜率的绝对值为: $\tan\theta = \frac{z}{x} = \frac{n_1}{n_3}\sqrt{\frac{n_3^2 - n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}}$, 而光轴与圆切面垂直所以光轴位于 n_1 与 n_3 的平面内且与 N_3 轴的夹角正切值为[2]:

$$\tan V = \frac{n_1}{n_3}\sqrt{\frac{n_3^2 - n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}} \tag{1}$$

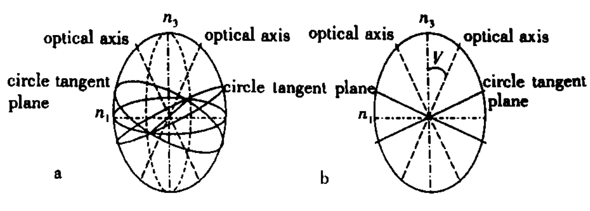

Fig. 1　The optical indicatrix of biaxial crystal
a— optical indicatrix　b— main tangent plane of n_1, n_3

2　第 II 类光轴的几何方法推导

第 II 类光轴是与光线方向相对应的, 所以要先由光率体得到光波面。由正二轴晶的光率体 $n_1 n_3$ 的主切面导出光波面的对称面, 如图 2 所示[1]。当

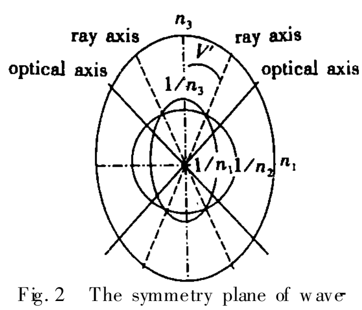

Fig. 2　The symmetry plane of wave-front surface deduced from n_1-n_3 main tangent plane

---

作者简介: 薛　冬, 男, 1975 年 12 月出生。研究生。主要从事晶体光学理论及偏光器件方面的研究工作。

收稿日期: 2001-12-11; 收到修改稿日期: 2002-03-04

光线方向沿由如图所示的光线轴方向传播时, 有相同的光线折射率, 即在图面内振动的光速与垂直图面振动的光速相等, 都等于 1/ n_2。这就是文中所说的第 II类光轴又叫光线轴。图 2 中内部的较小椭圆方程为 $x^2\left/\frac{1}{n_3^2}\right.+z^2\left/\frac{1}{n_1^2}\right.=1$, 而椭圆与光线轴的 4 个交点在圆 $x^2\left/\frac{1}{n_2^2}\right.+z^2\left/\frac{1}{n_2^2}\right.=1$ 上, 这样两式联立由 $x^2n_3^2+z^2n_1^2=x^2n_2^2+z^2n_2^2$ 可以得到图光线轴的斜率。而光线轴与 n_3 轴之间夹角正切值为其斜率的倒数, 只取正值:

$$\tan V'=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta=\frac{x}{z}=\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2}{n_3^2-n_2^2}}\quad(2)$$

这就是光线轴的取向, 它与光轴方向是不同的, 正如图中所示, 有微小的差别, 由所给公式可知两者之间一般相差不到 2°, 通常多在 1°以内。

3 第 I 类光轴的理论推导[3]

晶体主轴系中, $D_j=\varepsilon E_j\,(j=1,2,3)$。晶体简正模方程:

$$n_j^2E_j=n_2[E_j-k_j(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})]\quad(3)$$

或 $n_j^{-2}D_j=n^{-2}[D_j-t_j(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{t})]$, $j=1,2,3$, 式中, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{t}$ 分别为波法线和光线单位矢量, 且 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k}=E_1k_1+E_2k_2+E_3k_3$。把(3)式写成3个电场分量的线性齐次方程组:

$[n_1^2-n^2(1-k_1^2)]E_1+n^2k_1k_2E_2+n^2k_1k_2E_3=0$, $n^2k_2k_1E_1+[n_2^2-n^2(1-k_2^2)]E_2+n^2k_2k_3E_3=0$, $n_2k_3k_1E_1+n^2k_3k_2E_2+[n_3^2-n^2(1-k_3^2)]E_3=0$。

晶体中3个主轴折射率可由实验测定, 对于给定波法线 $\boldsymbol{k}$, 可求得电振动矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$, 也可定出相应折射率 n, 从而可研究平面波在晶体中的传播规律。

分析方程(3), 有解的条件是其系数行列式为0。展开后, 得到一个关于 n 的4次方代数方程: $[n_1^2+(n_2^2-n_1^2)k_2^2+(n_3^2-n_1^2)k_3^2]n^4-[n_1^2\times(n_2^2+n_3^2)+n_3^2(n_2^2-n_1^2)k_2^2+n_2^2(n_3^2-n_1^2)\times k_3^2]n^2+n_1n_2n_3=0$。

令 $a=n_1^2+(n_2^2-n_1^2)k_2^2+(n_3^2-n_1^2)k_3^2$, $-b=n_1^2(n_2^2+n_3^2)+n_3^2(n_2^2-n_1^2)k_2^2+n_2^2\times(n_3^2-n_2^1)k_3^2$, $c=n_1^2n_2^2n_3^2$, 式中, $k_1^2+k_2^2+k_2^3=1$。

上式是光线折射率 n_2 的2次方程, 表明了光波折射率的平方与光波法线 $\boldsymbol{k}$ 的关系, 由此式可求光线折射率的两实根。当光线沿光轴方向行进时有相等两根方程判别式: $\Delta=b^2-4ac=0$。化简整理, $[n_1^2(n_2^2-n_3^2)+n_2^2(n_3^2-n_1^2)k_3^2]^2+n_3^4(n_2^2-n_1^2)k_2^4+2n_2^2n_3^2(n_2^2-n_1^2)(n_3^2-n_1^2)k_2^2k_3^2+2n_1^2n_3^2(n_3^2-n_2^2)(n_2^2-n_1^2)k_2^2=0$。

由上式可以看出, 由于 $n_1<n_2<n_3$, 故每一项皆大于等于0, 要使结果为0, 必有 $k_2=0$ 和 $n_1^2(n_2^2-n_3^2)+n_2^2(n_3^2-n_1^2)k_3^2=0$, 故 $k_3^2=n_1^2(n_3^2-n_2^2)/n_2^2(n_3^2-n_1^2)$, $k_1^2=1-k_3^2=n_3^2(n_2^2-n_1^2)/n_2^2(n_3^2-n_1^2)$。

这样, 便求出光轴方向位于 k_1k_3 的平面内, 它的斜率为 k_3/k_1, 而与 k_3 方向的夹角的正切为: $k_1/k_3=\tan V=\frac{n_1}{n_3}\sqrt{\frac{n_3^2-n_2^2}{n_2^2-n_1^2}}$, 与前边几何方法所得(1)式一致。

4 第 II 类光轴的理论推导

可以仿照第 I 类光轴的推导, 由 $D_j=\varepsilon E_j\,(j=1,2,3)$ 及晶体简正模方程 $Kn_j^{-2}D_j=n^{-2}[D_j-t_j(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{t})]\,(j=1,2,3)$, 得到关于 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 的方程。与第3部分的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 相对对应, 推导方法完全相同。鉴于光波法线 $\boldsymbol{k}$ 与光线 $\boldsymbol{t}$ 的这种对应关系, 可以利用晶体中光波的"对偶定则"[2], 将第3部分的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{k}$, n_1, n_2, n_3 分别换成 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $-\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{t}$, n_1^{-1}, n_2^{-1}, n_3^{-1} 即可。所以不必再一步步计算, 只要把(1)式运用"对偶定则"进行变换就得到: $\tan V'=(n_3/n_1)\sqrt{\frac{(1/n_3^2)-(1/n_2^2)}{(1/n_2^2)-(1/n_1^2)}}=\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2}{n_3^2-n_2^2}}$, 与第2部分用几何方法所得(2)式一致。

5 结 论

第 I 类光轴与光波法线相对应, 第 II 类光轴与光线相对应, 它们之间的空间取向有微小的差别, 但却是两个完全不同的概念。搞清两个概念表象和内涵, 有助于理解光在晶体中的传播。

参 考 文 献

[1] 季寿元. 晶体光学. 北京: 人民出版社, 1961: 55~ 73.
[2] 蒋民华. 晶体物理. 济南: 山东科学技术出版社, 1985: 224~ 238.
[3] 李 华. 曲阜师范大学学报, 1999, 25(1): 77~ 78.