第 26 卷 第 6 期 激 光 技 术 Vol. 26, No. 6
2002 年 12 月 LASER TECHNOLOGY December, 2002

文章编号: 1001-3806(2002)06-0428-04

失调光学系统的矩阵分解与等效变换 *

张廷蓉[1,2] 吕百达[2]
([1]四川师范大学物理系,成都,610066) ([2]四川大学激光物理与化学研究所,成都,610064)

摘要: 在傍轴近似下,采用矩阵光学方法详细研究了失调光学系统变换矩阵的分解与等效变换问题。研究表明,任何用 3 ×3 *ABCDEF* 增广矩阵表示的失调系统的变换矩阵可以分解为 3 个基本矩阵 α,β,δ 的有序乘积。

关键词: 矩阵光学;失调光学系统;矩阵分解
中图分类号: O437 **文献标识码**: A

Matrix decomposition and equivalent transformation of misaligned optical systems

Zhang Tingrong[1,2], *Lü Baida*[2]
([1] Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, 610066)
([2] Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: Within the framework of the paraxial approximation the matrix decomposition and equivalent transformation of misaligned optical systems are studied in detail based on matrix method in optics. It has been shown that any 3 ×3 *ABCDEF* augmented matrix, which describes a misalighed optical system, can be represented by an ordered product of basic matrices of α, β and δ types.

Key words: matrix optics; misaligned optical system; matrix decomposition

引 言

在光学设计和激光光学中,常遇到光学系统的合成和等效变换问题,即已知光学系统的变换矩阵,根据各变换矩阵元素 A, B, C, D 确定组成该系统至少所需的光学元件数目、类型、参数及组合顺序。Casperson[1]首先研究了描述轴对称光学系统 2 ×2 矩阵的分解及系统的合成问题。对于实际光学系统,例如谐振腔,由于安装和调整误差、光学系统工作时外界环境产生的微扰、变形而产生失调。按文献[2],任何失调光学系统的变换性质可用一个 3 ×3 *ABCDEF* 增广矩阵表示,一个复杂的失调光学系统的变换矩阵可通过一系列 3 ×3 矩阵的乘积得到。近年来,Tovor 等人对 3 ×3 *ABCDGH* 广义光束矩阵及其应用作了较为系统的研究[3~6]。笔者采用矩阵光学方法着重研究了失调光学系统的 3 ×3 增广矩阵分解和等效变换,讨论了矩阵元 A, B, C, D 不同取值所对应的各种分解式,并以失调薄透镜和失调厚透镜为例,分别对 $B = 0$ 和 $B \neq 0$ 两种情况进行了具体讨论。

1 失调光学系统的矩阵分解与等效变换

按文献[2],一失调系统的 3 ×3 增广矩阵为:

$$M = \begin{bmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

,其行列式满足:

$$\det M = AD - BC = 1 \tag{1}$$

式中,A, B, C, D 为理想光学系统的矩阵元,E, F 表示系统的失调矩阵元。本文中限于所有矩阵元为实数情况。对于折射光学系统,$E = (1 - A)\varepsilon + (l - B)\varepsilon'$, $F = -C\varepsilon + (1 - D)\varepsilon'$, l 为参考面 RP_1 和 RP_2 之间的距离,ε 和 ε 表示光学系统的失调参数(位移与倾角);若为反射光学系统,则 $E = (1 - A)\varepsilon - B\varepsilon'$, $F = -C\varepsilon - (1 + D)\varepsilon'$。

可以证明,失调光学系统的光线变换矩阵 M(3 ×3 增广矩阵)可用不超过 6 个基本矩阵:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

的有序乘积来表示。α,β,δ 分别表示自由空间传

---

* 激光技术国家重点实验室及四川省教委基金资助项目。

作者简介:张廷蓉,女,1962 年 5 月出生。副教授。现从事激光与现代光学的科研和教学工作。

收稿日期:2001-12-14;收到修改稿日期:2002-01-31

输距离 a、焦距 $-\beta^{-1}$ 的薄透镜以及折射率为 n 顶角为 $\delta/(n-1)$ 的薄棱镜或失调角为 $\varepsilon'=\delta/2$ 的平面反射镜的变换矩阵。基本矩阵满足:

$$\boldsymbol{\beta\delta} = \boldsymbol{\delta\beta} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\delta}(\delta_1)\boldsymbol{\alpha}(a)\boldsymbol{\delta}(\delta_2) = \boldsymbol{\alpha}\left(\frac{a\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right)\boldsymbol{\delta}(\delta_1+\delta_2)\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{a\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\right) \tag{4}$$

或

$$\boldsymbol{\alpha}(a_1)\boldsymbol{\delta}(\delta)\boldsymbol{\alpha}(a_2) = \boldsymbol{\delta}\left(\frac{\delta a_2}{a_1+a_2}\right)\boldsymbol{\alpha}(a_1+a_2)\boldsymbol{\delta}\left(\frac{\delta a_1}{a_1+a_2}\right) \tag{5}$$

1.1　$B \neq 0$ 的分解

利用 α,β,δ 矩阵之间的基本关系式(3)式～(5)式,可以得到以下分解式:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{A-1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{D-1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{E}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{D-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{A-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & E/B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{D-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{A-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & E/B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{D-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & E/B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{A-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{D-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{E}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{A-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{D-1}{B} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{EB}{E+BF-DE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{E+BF-DE}{B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{B(BF-DE)}{E+BF-DE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (A-1)/B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

当 $B\neq0$, $C\neq0$, $DE\neq E+BF$ 时, $\boldsymbol{M}$ 矩阵有 6 种分解式,当 $B\neq0$, $C\neq0$, $DE=E+BF$ 时,按(6)式～(10)式 $\boldsymbol{M}$ 矩阵有 5 种分解式,当 $B\neq0$, $C=0$, $DE\neq E+BF$,按(7)式～(11)式, $\boldsymbol{M}$ 矩阵有 5 种分解式,当 $B\neq0$, $C=0$, $DE=E+BF$ 时,按(7)式～(10)式, $\boldsymbol{M}$ 矩阵有 4 种分解式。容易证明,上述结果与 Tovor 等人对 3×3 $ABCDGH$ 光束变换矩阵的分解[6]仅数学表示方法不同,但实质是一致的。

1.2　$B=0$ 的分解

当 $B=0$ 时,上述分解失效,需按以下方式展开后进行分解:

$$当\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} A & 0 & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B' & E \\ C & D' & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中, $B'=-A\alpha$, $D'=D-C\alpha$, α 为某一不为 0 的确定值。

若仅考虑(12)式中第 1 个矩阵,采用以上方法,可以写出 6 种分解式。当同时考虑 α 矩阵时,将增加如下 3 种分解式:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F+\frac{(D-C\alpha)E}{A\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{A-1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{CE}{A-1}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{D-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{E(D-C\alpha-1)}{A\alpha(D-1)}\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(13)$$

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&F+\frac{(D-C\alpha)E}{A\alpha}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{A-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{CE}{A-1}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{D-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&-\frac{E(D-C\alpha-1)}{A\alpha(D-1)}\\0&0&1\end{matrix}\qquad(14)$$

$$M=\begin{matrix}1&\frac{A(A-1)E\alpha}{A(A-1)F\alpha+(1-D+C\alpha)E}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&F+\frac{(1-D+C\alpha)E}{A\alpha(A-1)}\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&\frac{(A-1)}{C}\ \frac{(A-1)(AF\alpha+(D-C\alpha)E)}{A(A-1)F\alpha+E(1-D+C\alpha)}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{D-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{E(D-C\alpha-1)}{A\alpha(D-1)}\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(15)$$

由此可知,当 $B=0$ 时,一般有 9 种分解式,但在 $C=0$ 或 $A=D=1$ 时,增加的 3 个分解式失效。若 $A=D=1$,当 $B'\neq0$, $C\neq0$, $D'E\neq E+B'F$ 时,M 矩阵有 6 种分解式;当 $B'\neq0$, $C\neq0$, $D'E=E+B'F$ 时,M 矩阵有 5 种分解式;当 $B'\neq0$, $C=0$, $D'E\neq E+B'F$, M 矩阵有 5 种分解式;当 $B'\neq0$, $C=0$, $D'E=E+B'F$, M 矩阵只有 4 种分解式。

当 $$M=\begin{bmatrix}A&0&E\\C&D&F\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A'&B'&E'\\C&D&F\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(16)$$

式中,$A'=A-C\alpha$, $B'=-D\alpha$, $E'=E-F\alpha$, α 为某一不为 0 的确定值。

同理,在(16)式中的第 2 个矩阵一般也有 6 种分解式。当同时考虑 α 矩阵时,将增加如下 3 种分解式:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{E(A-1-C\alpha)}{(A-1)\alpha}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{A-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{CE}{A-1}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{D-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&-\frac{E-F\alpha}{D\alpha}\\0&0&1\end{matrix}\qquad(17)$$

$$M=\begin{matrix}1&0&0\\0&1&\frac{E(A-1-C\alpha)}{(A-1)\alpha}\\0&0&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&\frac{A-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{CE}{A-1}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{D-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{E-F\alpha}{D\alpha}\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(18)$$

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{E(A-1-C\alpha)}{(A-1)\alpha}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{A-1}{C}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\C&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&\frac{(D-1)(A-1)(F\alpha-E)}{C(CDE\alpha+(F\alpha-E)(A-1))}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{CDE\alpha+(A-1)(F\alpha-E)}{(A-1)D\alpha}\\0&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{D(D-1)F\alpha}{CDE\alpha+(A-1)(F\alpha-E)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

由此可知,失调矩阵一般有 9 种分解式,但在 $C=0$ 或 $A=1$ 时,上述增加的 3 种分解式失效。若 $A=1$,当 $B'\neq 0$, $C\neq 0$, $DE'\neq E'+B'F$ 时,M 矩阵有 6 种分解式;当 $B'\neq 0$, $C\neq 0$, $DE'=E'+B'F$ 时,M 矩阵有 5 种分解式;当 $B'\neq 0$, $C=0$, $DE'\neq E'+B'F$, M 矩阵有 5 种分解式;当 $B'\neq 0$, $C=0$, $DE'=E'+B'F$, M 矩阵有 4 种分解式。

2　应用例

2.1　失调薄透镜(B = 0)

失调薄透镜的变换矩阵为 $M=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 & \dfrac{\varepsilon}{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$, M 矩阵可按下式进行分解:

$$M=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\varepsilon}{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \text{ 或}$$

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\varepsilon}{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

上述分解表明,失调薄透镜的变换可以等效为通过二个基本光学元件:焦距为 f 的薄透镜和一失调角为 $\varepsilon/2f$ 的平面反射镜或焦距为 f 的薄透镜和一个折射率为 n、顶角为 $\dfrac{\varepsilon}{(n-1)f}$ 的薄棱镜的变换。

2.2　失调厚透镜(B ≠0)

按前述分解方法,可以得到 6 种分解式:

$$M=\delta(\delta_2)\,\alpha(\alpha_2)\,\beta(\beta)\,\alpha(\alpha_1)\,\delta(\delta_1) \qquad (21)$$

$$M=\delta(\delta_2)\,\beta(\beta_2)\,\alpha(\alpha)\,\beta(\beta_1)\,\delta(\delta_1) \qquad (22)$$

$$M=\beta(\beta_2)\,\delta(\delta_2)\,\alpha(\alpha)\,\beta(\beta_1)\,\delta(\delta_1) \qquad (23)$$

$$M=\delta(\delta_2)\,\beta(\beta_2)\,\alpha(\alpha)\,\delta(\delta_1)\,\beta(\beta_1) \qquad (24)$$

$$M=\beta(\beta_2)\,\delta(\delta_2)\,\alpha(\alpha)\,\delta(\delta_1)\,\beta(\beta_1) \qquad (25)$$

$$M=\beta(\beta_2)\,\alpha(\alpha_2)\,\delta(\delta)\,\alpha(\alpha_1)\,\beta(\beta_1) \qquad (26)$$

以上各分解式的物理意义是十分明显的,限于篇幅此地从略。

3　结　论

基于矩阵光学方法,对各种可能情况下失调光学系统的增广矩阵的分解问题作了全面的计算分析。研究表明,失调光学系统的增广矩阵可用 3 个基本矩阵 α, β, δ 的有序乘积来表示。并以失调薄透镜和厚透镜为例说明 $B=0$ 和 $B\neq 0$ 情况下分解式的应用。当(1)式不满足时,可按文献[2]采用归一化变换矩阵使之满足(1)式,或者再引入 γ 矩阵[1],但后者使分解变得较为复杂。研究结果对光学系统的设计或激光光束通过失调光学系统的变换有实际意义。

参　考　文　献

[1]　Casperson L W. Appl Opt,1981,20(13):2243～2249.

[2]　Gerrad A,Burch J M. Introduction to matrix methods in optics. New York:John Willey and Sons,1975.

[3]　Tovor A A,Casperson L W. J O S A,1995,A12(7):1522～1533.

[4]　Tovor A A,Casperson L W. J O S A,1996,A13(1):90～96.

[5]　Tovor A A,Casperson L W. J O S A,1996,A13(11):2239～2246.

[6]　Tovor A A,Casperson L W. J O S A,1997,A14(4):882～893.

(上接第 420 页)

Fig. 6　3D image

参　考　文　献

[1]　Lorensen W E,Cline H E. Computer Graphics,1987,21(4):163～169.

[2]　Doi A,Koide A. IEICE Transactions,1991,E74(1):214～224.

[3]　Cline H E,Lorensen W E. Medical Physics,1998,15(3):320～327.

[4]　Fuchs,Kedem Z M,Uselton S P. Communication of the ACM,1977,20(10):693～702.

[5]　Meyers W,Skinner S. ACM Transaction on Graphics,1992,11(3):228～258.

[6]　Levoy M. IEEE Computer Graphics and Application,1988,8(3):29～37.

[7]　Westover L. Computer Graphics,1990,24(4):367～376.