文章编号: 1001-3806(2002)04-0318-03

多散射介质中光子密度波扩散方程的求解*

朱　拓[1]　朱湘东[2]　张逸新[1]　陈　健[1]　倪晓武[3]
([1]江南大学计算科学与信息传播系, 无锡, 214036)
([2]美国加州大学戴维斯分校物理系, 戴维斯, 95616-8677)
([3]南京理工大学理学院, 南京, 210094)

摘要: 将光源作为一个复数点光源, 根据实验研究模型的要求, 求解了多散射介质中光子密度波扩散方程, 找出了与入射面相对应面的光子通量和介质中吸收系数改变量之间的关系。所得结论能直接用于多散射介质中成像问题的实验研究之中, 即通过对光子通量的检测, 反演出吸收系数改变量的分布, 从而达到多散射介质中的成像问题的解决。

关键词: 多散射介质; 光子密度波; 扩散方程
中图分类号: O436　　文献标识码: A

Solution of diffusion equation in multiple-scattering media with photon densing wave

Zhu Tuo[1], *Zhu Xiangdong*[2], *Zhang Yixin*[1], *Chen Jian*[1], *Ni Xiaowu*[3]
([1] Department of Computational Science & Information, Southern Yangtze University, Wuxi, 214036)
([2] Department of Physics, University of California at Davis, USA, Davis, 95616-8677)
([3] School of Science, NUST, Nanjing, 210094)

Abstract: In this paper, we consider the general situation in which a amplitude of the point light source may be modulated at frequency Ω. According to our experiment, we study the diffusing equation in theory. And get the results of relationship between the flux and uniform absorption coefficients. This result can directly be used in experiment about image in multiple-scattering media.

Key words: multiple-scattering media; photon densing wave; diffusion equation

引　言

在多散射介质中利用光子密度波理论进行成像, 为医疗诊断仪器的开发提供了一种引人注目的前景[1~3]。由于光子密度波在通过多散射介质时, 反映出了介质内在的一系列特性, 因而受到人们的日益关注[1,4~6]。

光子密度波在多散射介质中的传递行为由扩散方程来描述, 这是辐射传递理论方程的近似[7,8]。根据所设定的实验模型要求, 将光源设为复数光源来考虑, 详细求解了扩散方程, 得出了与入射面相对应的面上的光通量和吸收系数改变量的理论表达式。

1　求解扩散方程

光子传递方程的一般表达式如下[7]:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + c\mu_a(\vec{r})\Phi(\vec{r}) - \nabla[D(\vec{r})\nabla\Phi(\vec{r})] = S(\vec{r}, t) \tag{1}$$

式中, $\Phi(\vec{r}, t)$是光子密度, $\mu_a(\vec{r})$和$D(\vec{r})$分别是多散射介质中的吸收系数和扩散系数, $S(\vec{r}, t)$是光源项。设想光源是一般情况下的点光源, 其振幅由频率为 Ω 的位相项所调制, 即 $S(\vec{r}, t) = S_0 \times \exp(-i\Omega t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, 且 $D(\vec{r}) = c/\{3[\mu_a(\vec{r}) + (1-g)\mu_s(\vec{r})]\}$, $\mu_s(\vec{r}) = 1/l_s$称为散射系数, l_s 为散射平均自由程, $g = \langle\cos\theta_s\rangle$, c 为多散射介质中的光速。

通常情况下, 作为背景的多散射介质绝大部分是均匀的, 可将吸收系数和扩散系数分别用均匀部

---

* 教育部高校骨干教师基金资助项目。

作者简介: 朱　拓, 男, 1957 年 7 月出生。教授。现从事现代光子的研究与教学工作。

收稿日期: 2001-07-30; 收到修改稿日期: 2001-09-17

分量和非均匀部分改变量之和来表达。

$$\begin{aligned}\mu_a(\vec r) &= \mu_a + \delta\mu_a(\vec r)\\ D(\vec r) &= D + \delta D(\vec r)\end{aligned}\qquad(2)$$

对于密度函数 $\Phi(\vec r, t)$，其定解问题有形式解 $\Phi(\vec r, t) = \Phi(\vec r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$，采用惯用的微扰理论来解方程(1)。设 $\Phi_0(\vec r)$ 为方程(1)的零级解，$\Phi_1(\vec r)$ 为对 $\Phi_0(\vec r)$ 的一级微扰修正，则有：

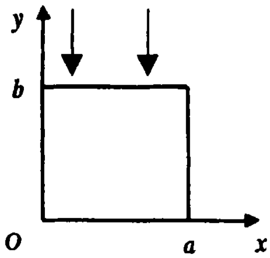

Fig. 1　Illuminance system of experimental arrangement

$$\Phi(\vec r) = \Phi_0(\vec r) + \Phi_1(\vec r)\qquad(3)$$

根据实验模型，设作为背景的多散射介质吸收系数忽略不计，即 $\mu_a = 0$，所以对 $\vec r \neq \vec r_0$ 的地方，方程(1)变为：

$$\nabla^2\Phi_0 + \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}\Phi_0 = 0\qquad(4)$$

$$\nabla^2\Phi_1 + \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}\Phi_1 = \frac{\delta\mu_a}{D}\Phi_0\qquad(5)$$

首先假设光入射面为 $y = b$ 的一面(见图 1)，解方程(4)，得：

$$\begin{aligned}&\Phi_0(x, y) = \frac{4I_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}\frac{\sin(n\pi x/a)\,\mathrm{sh}\,\alpha' y}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha' b}\\ &\alpha' = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}}\\ &\Phi_0(x, y = b) = I_0\end{aligned}\qquad(6)$$

类似地，若光入射面为 $x = a$ 的一面，得：

$$\begin{aligned}&\Phi_0(x, y) = \frac{4I_0}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\dots}\frac{\sin(m\pi y/b)\,\mathrm{sh}\,\alpha'' x}{m\,\mathrm{sh}\,\alpha'' b}\\ &\alpha'' = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{b^2} - \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}}\\ &\Phi_0(x = a, y) = I_0\end{aligned}\qquad(7)$$

若光入射面为 $y = 0$ 的一面，得：

$$\begin{aligned}&\Phi_0(x, y) = \frac{4I_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}\frac{\sin(n\pi x/a)\,\mathrm{sh}[\alpha'(b - y)]}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha' b}\\ &\Phi_0(x, y = 0) = I_0\end{aligned}\qquad(8)$$

若光入射面为 $x = 0$ 的一面，得：

$$\begin{aligned}&\Phi_0(x, y) = \frac{4I_0}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\dots}\frac{\sin(m\pi y/b)\,\mathrm{sh}[\alpha''(a - x)]}{m\,\mathrm{sh}\,\alpha'' a}\\ &\Phi_0(x = 0, y) = I_0\end{aligned}\qquad(9)$$

为求解方程(5)，可利用 Green 函数法，将方程(5)表达成 $\Phi_0(\vec r)$ 的方程，Green 函数满足：

$$\left(\nabla^2 + \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}\right)G(\vec r, \vec r') = -\delta(\vec r - \vec r') = -\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\qquad(10)$$

根据实验模型的要求，在计算 Green 函数时，其边界条件为 z 方向趋向于无穷，x 方向和 y 方向分别限制在 a 和 b 的范围内，即设想在无限长的矩形容器中。将 δ 函数分别用它们的本征函数表达：

$$\delta(x - x') = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\qquad(11)$$

$$\delta(z - z') = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos[k(z - z')]\,\mathrm{d}k\qquad(12)$$

且边界上 $G|_{y\equiv 0,\, y\equiv b}^{x\equiv 0,\, x\equiv a} = 0$，

则得出方程(10)的解为：

$$G(\vec r, \vec r') = \frac{2}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\times\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\times\frac{\exp\left[-\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \mathrm{i}\frac{\Omega}{Dc}}(z - z')\right]}{\sqrt{(m\pi/b)^2 + (n\pi/a)^2 - \mathrm{i}\Omega/Dc}}\qquad(13)$$

为了在数值计算时收敛更快一些，利用关系式[9]：

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\frac{\exp\left[-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + k^2}\,|z - z'|\right]}{\sqrt{(n\pi/a)^2 + k^2}} =\\ &\frac{a}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{k_0[k\sqrt{(x - x' - 2na)^2 + (z - z')^2}] -\\ &k_0[k\sqrt{(x + x' - 2na)^2 + (z - z')^2}]\}\end{aligned}\qquad(14)$$

这里 $k_0(x)$ 是零级 II 类修正贝塞尔函数。所以，Green 函数可以写成：

$$\begin{aligned}&G(\vec r, \vec r') = \frac{1}{\pi a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)\times\\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{k_0[\alpha''\sqrt{(x - x' - 2na)^2 + (z - z')^2}] -\\ &k_0[\alpha''\sqrt{(x + x' - 2na)^2 + (z - z')^2}]\}\end{aligned}\qquad(15)$$

或

$$\begin{aligned}&G(\vec r, \vec r') = \frac{1}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\times\\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{k_0[\alpha'\sqrt{(y - y' - 2mb)^2 + (z - z')^2}] -\\ &k_0[\alpha'\sqrt{(y + y' - 2mb)^2 + (z - z')^2}]\}\end{aligned}\qquad(16)$$

这样方程(5)就成为：

$$\Phi_1(\vec r) = \int\mathrm{d}\vec r'\,G(\vec r, \vec r')\frac{\delta\mu_a(\vec r')}{D}\Phi_0(x', y')\qquad(17)$$

在下一步的实验研究中，真正需要的是对应光入射面的光通量的理论值(这是实验时可测到的物理量)，密度函数与光通量的关系式为：

$$J_n = -D\partial\Phi(\vec{r}, t)/\partial n \tag{18}$$

在该实验模型下,得出的光通量的具体表达式如下:

$$J_n\Big|_{y=0} = -D\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial(-y)}\Big|_{y=0} = D\frac{\partial\Phi_1(\vec{r})}{\partial y}\Big|_{y=0} +$$

$$D\frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \sum_{j,k,l}\Delta x_j'\Delta y_k'\Delta z_l'\frac{1}{\pi a}\times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\times$$

$$\left[k_1\alpha'\sqrt{(y'+2mb)^2+(z-z')^2}\times\frac{(y'+2mb)\alpha'}{\sqrt{(y'+2mb)^2+(z-z')^2}}+\right.$$

$$\left.k_1\alpha'\sqrt{(y'-2mb)^2+(z-z')^2}\times\frac{(y'-2mb)\alpha'}{\sqrt{(y'-2mb)^2+(z-z')^2}}\right]\times$$

$$\frac{4I_0}{\pi}\sum_{n'=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n'\pi x'/a)\sin(\alpha'y')}{n\,\mathrm{sh}(\alpha'b)}\cdot\delta\mu_a(\vec{r}')+$$

$$D\frac{4I_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\alpha'}{n\,\mathrm{sh}(\alpha'b)} \tag{19}$$

$$J_n\mid_{x=0} = \sum_{j,k,l}\Delta x_j'\Delta y_k'\Delta z_l'\frac{1}{\pi b}\times$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)\times$$

$$\left[k_1\alpha''\sqrt{(x'+2na)^2+(z-z')^2}\times\frac{(x'+2na)\alpha''}{\sqrt{(x'+2na)^2+(z-z')^2}}+\right.$$

$$\left.k_1\alpha''\sqrt{(x'-2na)^2+(z-z')^2}\times\frac{(x'-2na)\alpha''}{\sqrt{(x'-2na)^2+(z-z')^2}}\right]\times$$

$$\frac{4I_0}{\pi}\sum_{m'=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(m'\pi x'/b)\sin(\alpha''x')}{m'sh(\alpha''b)}\cdot\delta\mu_a(\vec{r}')+$$

$$D\frac{4I_0}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x/b)\alpha''}{m\,\mathrm{sh}(\alpha''b)} \tag{20}$$

$$J_n\mid_{y=b} = -\sum_{j,k,l}\Delta x_j'\Delta y_k'\Delta z_l'\frac{1}{\pi b}\times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\times$$

$$\left[-k_1\alpha'\sqrt{(b-y'-2mb)^2+(z-z')^2}\times\frac{(b-y'-2mb)\alpha'}{\sqrt{(b-y'-2mb)^2+(z-z')^2}}+\right.$$

$$\left.k_1\alpha'\sqrt{(b+y'-2mb)^2+(z-z')^2}\times\frac{(b+y'-2mb)\alpha'}{\sqrt{(b+y'-2mb)^2+(z-z')^2}}\right]\times$$

$$\frac{4I_0}{\pi}\sum_{n'=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n'\pi x'/a)\sin[\alpha'(b-y')]}{n'\,\mathrm{sh}(\alpha'b)}\times$$

$$\delta\mu_a(\vec{r}')+D\frac{4I_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\alpha'}{n\,\mathrm{sh}(\alpha'b)} \tag{21}$$

$$J_n\mid_{y=a} = -\sum_{j,k,l}\Delta x_j'\Delta y_k'\Delta z_l'\frac{1}{\pi b}\times$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)\times$$

$$\left[-k_1\alpha''\sqrt{(a-x'-2na)^2+(z-z')^2}\times\frac{(a-x'-2na)\alpha''}{\sqrt{(a-x'-2na)^2+(z-z')^2}}+\right.$$

$$\left.k_1\alpha''\sqrt{(a+x'-2na)^2+(z-z')^2}\times\frac{(a-x'-2na)\alpha''}{\sqrt{(a+x'-2na)^2+(z-z')^2}}\right]\times$$

$$\frac{4I_0}{\pi}\sum_{m'=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(m'\pi y'/b)\sin[\alpha''(a-x')]}{m'\,\mathrm{sh}(\alpha''a)}\times$$

$$\delta\mu_a(\vec{r}')+D\frac{4I_0}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(m\pi y/b)\alpha''}{m\,\mathrm{sh}(\alpha''a)} \tag{22}$$

这里,$K_1(r)$ 是一级 II 类修正贝塞尔函数。

2 结果讨论

结合实验研究的具体要求,将入射光源作为复函数,详细求解了光子密度波通过多散射介质扩散方程,具体求出了光通量与多散射介质中吸收系数改变量的关系式。所得结果对多散射介质中的成像问题研究是十分重要的理论结果。根据所得的结果,通过实验具体测出光通量并经反演计算可以得到 $\delta\mu_a$ 的分布向量,这就为图像处理成像问题提供了最有效的基础。

参 考 文 献

[1] Yodh A, Chance B. Physics Today, 1995, 48: 34~40.

[2] Chance B, Alfano R R. Proc SPIE, 1993, 1888: 334.

[3] Chanceand B, Alfano R R. Proc SPIE, 1995, 2389: 291.

[4] Wabnitz H, Rinneberg H. Appl Opt, 1997, 36(1): 64~74.

[5] O' Leary M A, Boas D A, Chance B *et al*. Opt Lett, 1995, 20: 426~428.

[6] Boas D A, O' Leary M A, Chance B *et al*. Proc Natl Acad Sci, 1994, 91: 4887~4891.

[7] Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. New York: Academic, 1978.

[8] Van de Hulst H C. Multiple Light Scattering. New York: Academic, 1980.

[9] Collin R E. Field Theory of Guided Waves. 2nd ed, New York: IEEE Press, 1991.