

文章编号: 1001-3806(2002)04-0311-03

## 高斯光束对颗粒衍射测量的影响\*

杨初平 何振江 杨冠玲

(华南师范大学物理系, 广州, 510631)

摘要: 理论推导了高斯光束的圆孔夫琅和费衍射结果并与平行平面波的圆孔夫琅和费衍射结果进行比较, 数值计算和理论分析表明, 当激光光束的束宽半径远大于圆孔半径时, 两者的衍射结果是非常接近的; 当激光光束的束宽半径接近于圆孔半径时, 高斯光束的衍射偏离平行光衍射。考虑光强的高斯分布, 给出了某一粒度颗粒群的衍射结果。

关键词: 高斯光束; 粒度测量; 夫琅和费衍射

中图分类号: O435 文献标识码: A

## The effect of Gaussian beam on particle size measurement

Yang Chuping, He Zhenjiang, Yang Guanling

(Department of Physics, South China Normal University, Guangzhou, 510631)

**Abstract:** The Fraunhofer diffraction of Gaussian beam by a circular aperture are derived and are compared to that of plane wave in this paper. Through theoretical and numerical analyze, it shows that both results are the similar while the radius of Gaussian beam is much larger than the radius of circular aperture, otherwise, they are different. Then the Fraunhofer diffraction of Gaussian beam by a group of particles with the same size are given.

**Key words:** Gaussian beam; particle size measurement; Fraunhofer diffraction

### 引言

夫琅和费衍射法作为一种无接触的颗粒尺寸测量方法, 已经在工业生产、科学研究上得到广泛的应用。对于测量存在的一些问题, 人们讨论过无因次准则数的影响<sup>[1]</sup>、光能测量修正的双参数线性补偿方法<sup>[2]</sup>、提出测量多峰颗粒尺寸分布的新算法<sup>[3]</sup>。夫琅和费衍射法的理论基础是平面波的圆孔夫琅和费衍射<sup>[4,5]</sup>, 认为测量面上的入射光强是处处相等的。实际上, 由于激光光束经过透镜传输后光强的分布满足高斯分布, 测量面上各处接收的入射光强并不一样, 这对测量结果会产生影响, 因此, 有必要分析高斯光束与平行光束圆孔夫琅和费衍射的特点。文中推导了高斯光束的圆孔衍射结果, 并与平行光束圆孔衍射进行详细的比较, 给出了某一粒度颗粒群的高斯衍射结果。

### 1 入射光强均匀分布理论结果

对半径为  $R$  的圆孔, 在平面波的垂直照射下, 根据圆孔的夫琅和费衍射原理, 在透镜的后焦面上散射光强分布为<sup>[6]</sup>:

$$I(r, R) = \left[ \frac{kR^2}{2f} \right]^2 I_0 \left[ \frac{2J_1(kRr/f)}{kRr/f} \right]^2 \quad (1)$$

式中,  $I_0$  为入射光光强,  $f$  为透镜的焦距,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $r$  为焦面上测量点与光轴的距离,  $J_1(kRr/f)$  为一阶贝塞尔函数。

如果将圆孔当作直径为  $D_i$  的颗粒, 且只考虑很小的散射角时, 散射光强分布(1)式可以写为<sup>[5]</sup>:

$$I(\theta, D_i) = \frac{D_i^2 x^2}{16f^2} I_0 \left[ \frac{2J_1(x\theta)}{x\theta} \right]^2 \quad (2)$$

式中,  $x = kR = 2R\pi/\lambda$ ,  $\theta = r/f$  为测量点对光轴的夹角,  $J_1(x\theta)$  为一阶贝塞尔函数。

### 2 高斯光束的圆孔衍射特点

高斯光束的光强分布为:

$$I(r, z) = I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp \left[ -\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] \quad (3)$$

式中,  $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + (z/\lambda f)^2}$  (4)

\* 广东省环保局、广州市环保局资助项目。

作者简介: 杨初平, 男, 1970年7月出生。研究生。现从事光电技术与系统的研究工作。

收稿日期: 2001-04-03; 收到修改稿日期: 2001-07-11

为激光光束沿光轴在不同位置  $z$  的束宽半径;  $I_0$  为当  $r = 0$  且  $z = 0$  的光强。

根据夫琅和费衍射理论, 高斯光束在圆孔焦平面上衍射结果为:

$$E_G(x, y) = \frac{\exp(jkf)}{j\lambda f} \exp\left[j \frac{k(x^2 + y^2)}{2f}\right] \times \iint_{-\infty}^{\infty} E_0 \frac{\omega_0}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{\omega^2(z)}\right] \text{cir}\left[\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{R}\right] \times \exp\left[-2\pi j\left(\frac{xx_0}{\lambda f} + \frac{yy_0}{\lambda f}\right)\right] dx_0 dy_0 \quad (5)$$

式中,

$$\text{cir}\left[\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{R}\right] = \begin{cases} 1, & x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, \text{ 为圆孔函数。} \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

下面分析在高斯光束垂直照射下, 在透镜焦平面上的衍射结果。

为了求出(5)式, 进行了如下的处理。

根据平面波的衍射结果(1)式, 在光强(3)式的照射下, 如图1所示, 取圆孔上半径为  $a$  和  $a + da$  的两个圆孔的平面光束衍射结果相减, 便可得到圆孔上  $a \sim a + da$  环面透过的光的衍射结果:

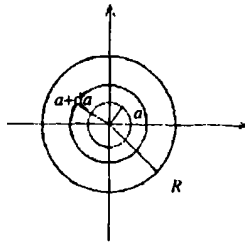


Fig. 1 Circular aperture

$$d[I_G(a, r)] = I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{2a^2}{\omega^2(z)}\right] \times \text{dk}\left\{\left[\frac{ka^2}{2f}\right]^2 \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2\right\} \quad (6)$$

在高斯光束的照射下, 整个圆孔的衍射光在后焦面上的分布为:

$$I_G(r) = \int_0^R d[I_G(a, r)] = \int_0^R I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \times \exp\left[-\frac{2a^2}{\omega^2(z)}\right] \text{dk}\left\{\left[\frac{ka^2}{2f}\right]^2 \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2\right\} \quad (7)$$

式中,  $R$  为圆孔的半径,  $r$  为后焦面上的某点与光轴的距离。

由分部积分公式可得结果为:

$$I_G(r) = I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{2R^2}{\omega^2(z)}\right] \left[\frac{kR^2}{2f}\right]^2 \times \left[\frac{2J_1(kRr/r)}{kRr/f}\right]^2 + I_0 \int_0^R \left[\frac{ka^2}{2f}\right]^2 \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2 \times \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{2a^2}{\omega^2(z)}\right] \left[\frac{4a}{\omega^2(z)}\right] da = I_1 + I_2 \quad (8)$$

(8)式即为高斯光束的圆孔衍射结果。高斯光束在圆孔内的光强分布可看成:

$$I_G(r) = I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{2R^2}{\omega^2(z)}\right] + I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \times \left\{ \exp\left[-\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right] - \exp\left[-\frac{2R^2}{\omega^2(z)}\right] \right\} = I_{G1} + I_{G2}$$

式中,  $I_{G1}$ 为圆孔内的均匀光强,  $I_{G2}$ 为减去均匀部分后的光强。因此, (8)式第1部分相当于入射光强值等于  $I_{G1}$ 的平面波衍射结果, 第2部分相当于  $I_{G2}$ 部分衍射的结果。这与直接采用夫琅和费衍射公式得出的结果是一样的<sup>[7]</sup>。

为了比较不同  $R/\omega(z)$  高斯光束的衍射结果的特点, 对(8)式的两个部分  $I_1, I_2$  进行数值计算, 结果如图2a、图2b; 图3为(8)式在不同  $R/\omega(z)$  的计算结果(其中 a, b 曲线几乎重合); 图4为(1)式即平面波的衍射结果。

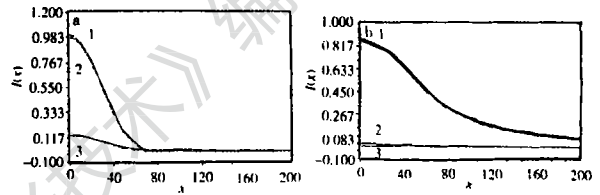


Fig. 2 a- distribution of  $I_1$  of the diffraction of Gaussian beam with different  $R/\omega(z)$  (1- 1/100, 2- 1/10, 3- 1) b- distribution of  $I_2$  of the diffraction of Gaussian beam with different  $R/\omega(z)$  (1- 1/100, 2- 1/10, 3- 1)

从图2~图4, 得出如下结论: (1) 当高斯光束的光斑半径比圆孔的半径大得多时(即  $R/\omega(z) = 1/100, 1/10$ ), 高斯光束的衍射结果(8)式由第1部分

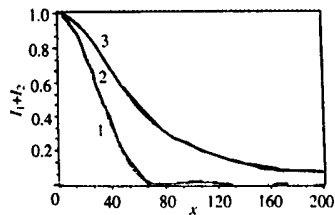


Fig. 3 Diffraction distribution of Gaussian beam by a circular aperture

$I_1$  所决定, 第2部分  $I_2$  所占的比例非常小。当光束的光斑半径与圆孔的半径差不多时(即  $R/\omega(z) = 1$ ), 第2部分  $I_2$  反而占优势。见图2。(2) 当高斯光束的光斑半径比圆孔的半径大得多时(即  $R/\omega(z) = 1/100, 1/10$ ), 高斯光束的衍射结果与平面波的衍射结果是很接近的。而高斯光束的光斑半径与圆孔的半径相当时(即  $R/\omega(z) = 1$ ), 高斯光束的圆孔衍射结果明显偏离平面波衍射结果。见图3、图

4

4。

为了进一步了解高斯光束衍射及其与平面波衍射的关系,把高斯光束衍射结果的第 2 部分  $I_2$  与第 1 部分  $I_1$  相比较,即  $I_2/I_1$ ,如图 5 所示;并对高斯光束衍射结果与平行光的衍射结果作比较,即  $I_G/I_p$ ,如图 6 所示。

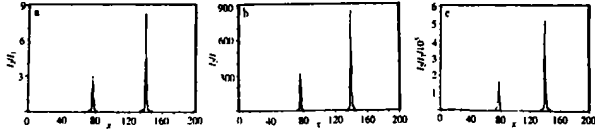


Fig. 5 Distributions of  $I_2/I_1$  with different  $R/w(z)$

a- 1/100; b- 1/10; c- 1

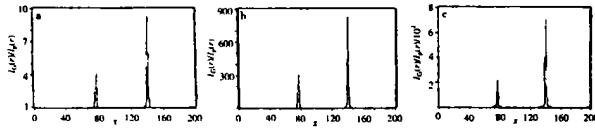


Fig. 6 Distributions of  $I_G(r)/I_p(r)$  with different  $R/w(z)$

a- 1/100; b- 1/10; c- 1

由图 5 和图 6,得出如下结论:(1)当光斑半径远大于圆孔半径时,高斯光束衍射结果的第 2 项与第 1 项相比较,即  $I_2/I_1$ ,第 1 项大部分点的数值相对于第 2 项占优势,但一些点是例外;随着光斑半径趋近于圆孔半径,第 2 项的数值反而占优势。(2)当光斑半径远大于圆孔半径时,高斯光束与平面波两者的衍射分布是相当接近的,但在一些点, $I_G(r)/I_p(r)$ 的值也出现(1)中悬殊的情况,当然这些点的数值是很小的;随着光斑半径趋近于圆孔半径,高斯光束的衍射结果偏离平面波的衍射结果。

### 3 颗粒群的衍射结果

(8)式是单个颗粒对高斯光束的衍射结果。如果考虑测量区域光束的高斯分布,而每个颗粒的衍射还认为是平面波衍射,不难得出对于半径为  $d$  的圆形测量区域,所有同一尺寸  $a$  的颗粒对高斯光束衍射的总结果为:

$$I_a(r) = \int_0^d I_G(a, r) n_i 2\pi x dx = \int_0^d I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-\frac{2x^2}{\omega^2(z)}\right] \left(\frac{ka^2}{2f}\right)^2 \times \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2 n_i 2\pi x dx \quad (9)$$

式中,  $n_i$  为单位测量面积上某一尺寸的颗粒数,  $x$

为圆形测量区域上某个环面的内径。这时,  $n_i$  个颗粒的衍射结果:

$$I(a, r) = n_i \left(\frac{ka^2}{2f}\right)^2 I_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2 \times \frac{\omega^2(z)\pi}{2} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{2d^2}{\omega^2(z)}\right] \right\} \quad (10)$$

### 4 结 论

从上面的分析看来,高斯光束的圆孔衍射分布在光斑半径远大于圆孔半径 [ $R/\omega(z) (= 1/100, 1/10)$ ] 时,主要由(8)式中的第 1 部分所决定,其中的第 2 部分可以略去,其衍射分布可以用平面波衍射分布描述,因为经过扩束的光斑半径与圆孔半径之比为  $10^4$  数量级,这时的圆孔以内的光强可以认为是均匀的。理论分析也可得出上述的结果。

对(8)式,由于  $R/\omega(z) \ll 1$ ,故  $\exp[-2R^2/\omega^2(z)] \approx 1$ ,且:

$$\int_0^R \left(\frac{ka^2}{2f}\right)^2 \left[\frac{2J_1(kar/f)}{kar/f}\right]^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \times \exp\left[-\frac{2a^2}{\omega^2(z)}\right] \left(\frac{4a}{\omega^2(z)}\right) da \approx 0.$$

故:

$$I_G(r) \approx I_0 \exp\left[-\frac{2R^2}{\omega^2(z)}\right] \left(\frac{kR^2}{2f}\right)^2 \left[\frac{2J_1(kRr/f)}{kRr/f}\right]^2 \approx I_0 \left(\frac{kR^2}{2f}\right)^2 \left[\frac{2J_1(kRr/f)}{kRr/f}\right]^2 \quad (11)$$

因此,通常的激光光束的光斑半径远大于圆孔半径,颗粒粒度测量完全满足平面波的夫琅和费衍射,不必考虑光强的高斯分布。

### 参 考 文 献

- [1] Shen J Q, Wang N N. Chinese J Lasers (in Chinese), 1998, 25 (10): 891~ 895.
- [2] Zhou G, Tian J D, Zhang Y M et al. J Optoelectronics Laser (in Chinese), 1998, 9(1): 32~ 34.
- [3] Zhen G, Liu T Y, Chen Sh Zh. Chinese J Lasers (in Chinese), 1998, 25(4): 377~ 380.
- [4] Van de Hulst H C. Light Scattering by Small Particles. New York: John Wiley & Sons Inc, 1957.
- [5] 刘子超, 赵云惠. 浓雾及颗粒的激光测量原理. 北京: 宇航出版社, 1988.
- [6] 顾德门 J W. 傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社, 1979.
- [7] Gu Y J, Yang H J. College Physics (in Chinese), 1999, 18(6): 6~ 8.