文章编号: 1001-3806(2002)04-0306-02

径向平方贝塞耳函数调制高斯光束的研究*

王喜庆　　　　吕百达**
(西南交通大学应用物理系, 成都, 610031)　(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 在一般情况下从近轴波动方程出发直接推导出变量为径向平方的贝塞耳函数调制的高斯光束是其解, 并研究了它在自由空间中的传输特性。

关键词: 波动方程; 本征解; QBG 光束; 传输
中图分类号: O435　　　文献标识码: A

Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence

Wang Xiqing
(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)
Lü Baida
(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: In the paper, the solution of Bessel-modulated Gaussian beams (QBG beams) with quadratic radial dependence is derived by solving the paraxial wave equation derives radial dependence. The propagation property in free space is studied.

Key words: wave equation; eigensolution; QBG beams; propagation

引　言

最近, Caron 和 Potvliege 提出了一种新的光束——变量为径向平方的贝塞耳函数调制的高斯光束(QBG 光束)[1], 并对其一些基本特性进行了讨论。QBG 光束还有许多有趣的非高斯光束特性, 比如, 在选取适当参数时, 在 z 轴上的分布有平顶状, 因此, 对这类光束的特性进行研究是有意义的。从近轴波动方程出发直接推导出了变量为径向平方的贝塞耳函数调制的高斯光束, 并对其在自由空间的传输特性进行了研究。

1　理论推导

在缓变振幅(SVA)近似下由赫姆霍兹方程得到如下形式的近轴波动方程[2]:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}-2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z}=0 \tag{1}$$

式中, $E(r,\varphi,z)=A(r,\varphi,z)\exp(\mathrm{i}kz)$　(2)

令 $A=B(r,\varphi,z)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}Q(z)r^2+P(z)\right]\right\}$　(3)

对(3)式求偏导数, 代入(1)式整理得:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}+\left[\frac{1}{r}-2\mathrm{i}Q(z)r\right]\frac{\partial B}{\partial r}-\left[Q^2(z)+k\frac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}\right]r^2B-2\mathrm{i}k\frac{\partial B}{\partial z}-\left[2k\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}+2\mathrm{i}Q(z)\right]B+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2}=0 \tag{4}$$

令　$2k\mathrm{d}P(z)/\mathrm{d}z+2\mathrm{i}Q(z)=0$　(5)

$$Q^2(z)+k\mathrm{d}Q(z)/\mathrm{d}z=-4\mu^2/w^4(z) \tag{6}$$

并作变量代换, 令:

$$\rho(r,z)=\sqrt{\mu}r/w(z)\qquad \xi(r,z)=z \tag{7}$$

则(4)式变为:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2}+\left\{\frac{1}{\rho}-\mathrm{i}\frac{2}{\mu}w^2(z)\rho\left[Q(z)-\frac{k}{w(z)}\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]\right\}\times\frac{\partial B}{\partial \rho}-\mathrm{i}\frac{2}{\mu}kw^2(z)\frac{\partial B}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2}+4\rho^2B=0 \tag{8}$$

令 $Q(z)-[k/w(z)][\mathrm{d}w(z)/\mathrm{d}z]=0$　(9)

令 $B(\rho,\varphi,\xi)=B(\rho,\varphi)$, 分离变量:

* 西南交通大学校科学研究基金和激光技术国家重点实验室资助项目。

** 西南交通大学客座教授。

作者简介: 王喜庆, 男, 1959 年出生。副教授, 博士研究生。从事光束传输变换等研究。

收稿日期: 2000-12-26

$$B(\rho,\varphi) = J(\rho)\Phi(\varphi) \tag{10}$$

由(8)式得:

$$\frac{1}{J}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\rho}+4\rho^4J\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{11}$$

令(11)式等于 m^2, 则(11)式分离为:

$$\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}\varphi^2+m^2\Phi=0 \tag{12}$$

$$\rho^2(\mathrm{d}^2J/\mathrm{d}\rho^2)+\rho(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\rho)+4\rho^4J-m^2J=0 \tag{13}$$

解微分方程(12)得: $\Phi(\varphi)=\Phi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}$　(14)

对(13)式, 令 $\tau=\rho^2$　(15)

将(15)式代入(13)式整理得:

$$\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\tau}+\left[1-\left(\frac{m}{2}\right)^2\frac{1}{\tau^2}\right]J=0 \tag{16}$$

(16)式是标准的贝塞耳函数的微分方程, 故其解为:

$$J=\mathrm{J}_{m/2}(\tau) \tag{17}$$

$\mathrm{J}_{m/2}(\tau)$ 是 $m/2$ 阶的贝塞耳函数, 将(8)式代入(18)式并代入(20)式得:

$$J=\mathrm{J}_{m/2}\left[\frac{\mu r^2}{w^2(z)}\right] \tag{18}$$

将(18)及(14)式代入(10)式后, 再代入(3)式, 由(2)式得: $E(r,\varphi,z)=A_0\mathrm{J}_{m/2}[\mu r^2/w^2(z)]\times$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\left[Q(z)r^2/2+P(z)\right]\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \tag{19}$$

式中, $w(z)$, $Q(z)$ 及 $P(z)$ 为待定函数, 由参数方程(5), (6)及(9)式决定。

由(5), (6)及(10)式, 并注意到当 $\mu=0$ 时, 应得到基模高斯光束的形式, 得:

$$w(z)=w_0\sqrt{1-(\mu^2+1)\left(\frac{z}{z_\mathrm{R}}\right)^2-2\mathrm{i}\frac{z}{z_\mathrm{R}}} \tag{20}$$

式中, w_0 为基模高斯光束的束腰半径, $z_\mathrm{R}=\frac{1}{2}kw_0^2$ 为基模高斯光束的瑞利长度。

将(20)式代入(9)式得:

$$Q(z)=[-2/w^2(z)][(\mu^2+1)z/z_R+\mathrm{i}] \tag{21}$$

将(21)式代入(5)式, 积分并整理得

$$P(z)=\mathrm{i}\ln[w_0/w(z)] \tag{22}$$

将(20)~(22)式代入(19)式, 经运算得:

$$E(r,\varphi,z)=A_0\frac{w_0}{w(z)}\mathrm{J}_{m/2}\left[\frac{\mu r^2}{w^2(z)}\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{1-\mathrm{i}(\mu^2+1)z/z_\mathrm{R}}{w^2(z)}r^2\right]\times$$
$$\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{23}$$

这样就得到了在柱坐标下, 波动方程的近轴近似解, 考虑到贝塞耳函数的性质(如 $\mathrm{J}_{-1/2}(0)=\infty$ 等), 将(23)式改写为:

$$E(r,\varphi,z)=A_0\frac{w_0}{w(z)}\mathrm{J}_{|m|/2}\left[\frac{\mu r^2}{w^2(z)}\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{1-\mathrm{i}(\mu^2+1)z/z_\mathrm{R}}{w^2(z)}r^2\right]\times$$
$$\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{24}$$

即 QBG 光束的场分布与文献[1]中的(15)式相同。

2　QBG 光束在自由空间的传输

当 QBG 光束通过无光阑的一阶 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 光学系统时, 其场分布由柱坐标下的广义菲涅耳衍射积分给出[3]:

$$E(r,\varphi,z)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\exp(\mathrm{i}kL)\iint E_0(r_0,\varphi_0,z_0)\times$$
$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[Ar_0^2+Dr^2-2rr_0\cos(\varphi_0-\varphi)\right]\right\}\times$$
$$r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\varphi_0 \tag{25}$$

式中, λ 为光束波长, A, B, C, D 是一阶光学系统的矩阵元素, 且 $AD-BC=1$, 假设光束的入射平面位于 $z=0$ 处, 其出射平面位于 z 处, 由(29)式, 令 $z=0$, 代入(24)式, 并利用贝塞耳的积分表达式[4]:

$$\mathrm{J}_n(x)=\frac{\mathrm{i}^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{i}x\cos\theta+\mathrm{i}n\theta)\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

及积分[5]:

$$\int_0^\infty\exp(-pt)\mathrm{J}_v(t)\mathrm{J}_{2v}(2\sqrt{at})\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1/2}{(p^2+1)^{1/2}}\exp\left(-\frac{ap}{p^2+1}\right)\mathrm{J}_v\left(\frac{a}{p^2+1}\right) \tag{27}$$

则(25)式变为:

$$E(r',\varphi,z)=(-\mathrm{i})^{m+1}\frac{\pi w_0^2/\lambda B}{\sqrt{\mu^2+\left(1-\frac{\mathrm{i}kA}{2B}w_0^2\right)^2}}\times$$
$$\mathrm{J}_{|m|/2}\left\{\frac{(k^2w_0^4/4B^2)\mu r^2}{\mu^2+\left[1-(\mathrm{i}kA/2B)w_0^2\right]^2}\right\}\times$$
$$\exp\left\{-\left[\frac{(k^2w_0^4/4B^2)\left(1-\mathrm{i}kAw_0^2/2B\right)}{\mu^2+\left(1-\mathrm{i}kAw_0^2/2B\right)^2}-\frac{\mathrm{i}kD}{2B}w_0^2\right]r'^2\right\}\exp(\mathrm{i}m\varphi)\exp(\mathrm{i}kz) \tag{28}$$

式中, $r'=r/w_0$ 为归一化坐标。为书写方便略去了常数 A_0。

下面作为(28)式的应用, 说明 QBG 光束在自由空间的传输特性。

图 1 是 $m=0$, $\mu=5$ 时, QBG 光束在自由空间传输时, 横向光强的分布情况, 其中, 菲涅耳数 $N_z=w_0^2/\lambda z$。由图 1a~图 1d 可以看出, QBG 光束在自空间传输时其横向光强分布的变化情况。近场

(下转第 310 页)

信号的检出, U_3 和 U_4 为过零比较器, 以将正弦信号转换为方波, U_5 也为过零比较器, 它将来自波形发生器的参考正弦波也转换为方波。U_6 和 U_7 为异或门完成对两电极电流与参考信号的比相, 将相位差转换为占空比的变化, 其后的 RC 低通滤波将占空比不同的方波变换为直流信号, U_8 为一差分放大器完成对两路信号的差分放大。图 7 为经过处理电路得到的各个环节的信号波形, 由差分放大器输出的直流电压将与两电极的电位差成正比, 从而也与以 PSD 中心为坐标原点的光斑的位置坐标成正比。图 8 为 PSD 频分复用技术的原理框图。

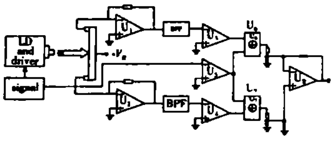

Fig. 6　Schematic of signal processing circuit

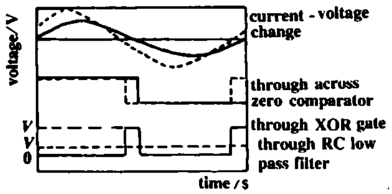

Fig. 7　Signals of the circuit

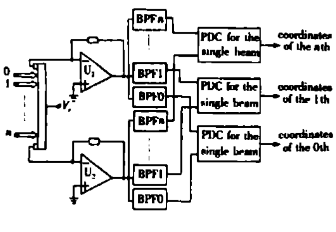

Fig. 8　Realization of the measurement of coordinates of multiple light spots with FDM technology

由此设计思想及原理框图设计的电路测试系统在进行测试的过程中, 得到了相位差与位置相关的两路信号, 经过整形及过零比较、鉴相后得到与位置相关的位置信息, 经过测量, 该位置信息与所模拟的结果是相吻合的。

4　结　论

对基于相位法的 PSD 定位技术从理论模拟及实验结果表明, 位置数据与所模拟的结果是相吻合的, 与实际的位置是相关的, 因此, 利用相位法进行光斑定位是完全可行的, 并且能够取得比幅度法定位更高的抗干扰效果和检测灵敏度, 而且对光强要求较低, 电路简单。

参　考　文　献

[1]　贺安之, 阎大鹏. 现代传感器原理及应用. 1 版, 北京: 宇航出版社, 1995.

[2]　颜景龙, 姚竹亭. PSD 器件测量电路探讨, 中国兵工学会第 6 届测试技术年会论文集(6). 1992, 605~ 609.

[3]　Narayanan C, Buckman A B, Buscl-Vishni I. IEEE Trans on Instrum Measure, 1994, 43(6): 830~ 836.

[4]　Narayanan C, Buckman A B, Buscl-Vishniac I *et al*. IEEE Trans on Electron, 1993, 40(9): 1688~ 1694.

[5]　袁红星. 位置敏感探测器定位理论及应用研究, 南京理工大学博士学位论文. 1999.

[6]　Klein C A, Bierig R W. IEEE Trans on Electron Dev, 1974, ED21 (8): 532~ 537.

(上接第 307 页)

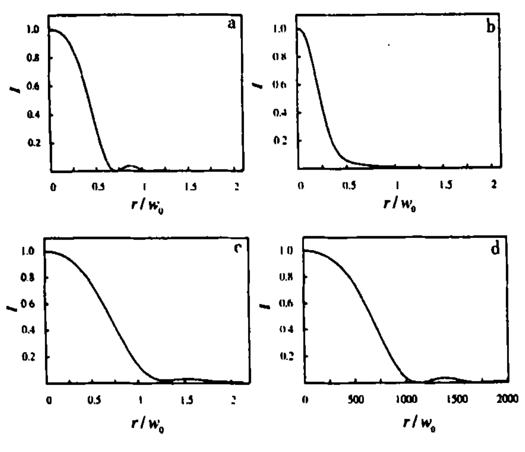

Fig. 1　Intensity distributions of a QBG beam propagating in free space, the calculation parameters are $\mu= 5$, a- $N_z= 1000$, b- $N_z= 2$, c- $N_z= 0.8$, d- $N_z= 0.001$

(如 $N_z= 1000$) 和远场(如 $N_z= 0.001$) 时, 横向光强分布相似, 有两个零点(如图 1a 和图 1d 所示), 而在中间区域(如 $N_z= 2$, $N_z= 0.8$) 零点消失了(如图 1b 和图 1c 所示), 这与高斯光束在自由空间的传输特性完全不同[6]。当 m 和 μ 不同时, 其传输特性也有所不同, 因为它们代表不同的光束。

3　小　结

从近轴波动方程出发, 证明了 QBG 光束是近轴波动方程的解, 从推导中可看出, 参数 μ 可取实数, 纯虚数及复数; m 可以取偶数、奇数等, 它们分别代表着不同的光束。给出了 QBG 光束通过一阶 *ABCD* 光学系统的变换公式, 并以自由空间中的传输为例, 说明 QBG 光束不同于高斯光束的传输特性。

参　考　文　献

[1]　Caron C F R. Potvliege R M. Opt Commun, 1999, 164: 83~ 93.

[2]　吕百达. 强激光的传输与控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.

[3]　Collins S A. J O S A, 1970, 60: 1168.

[4]　梁昆淼. 数学物理方法. 3 版, 北京: 高等教育出版社, 1998.

[5]　Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F *et al*. Tables of Integral Transforms. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.

[6]　吕百达. 激光光学. 2 版, 成都: 四川大学出版社, 1992.