

文章编号: 1001-3806(2002)03-0234-03

## 余弦高斯光束通过硬边光阑的解析传输公式\*

王喜庆

吕百达

(西南交通大学应用物理系, 成都, 610031)

(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都, 610064)

**摘要:** 从 Collins 公式出发, 对余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶  $ABCD$  光学系统的传输进行了研究, 采用将矩形域函数表示为复高斯光束迭加的技巧, 推导出了普适的场分布的解析公式。作为应用例, 对余弦高斯光束通过有硬边光阑的薄透镜聚焦系统进行了数值计算, 计算结果表明, 作者的结果与直接由 Collins 公式衍射积分所得结果一致。数值计算证明, 用该方法能节约大量机时, 并可推广到其它光束通过硬边光阑光学系统的传输研究。

**关键词:** 余弦高斯光束; 硬边光阑; 传输

中图分类号: O435 文献标识码: A

## Propagation expression for cosine-Gaussian beams through a hard edge aperture

Wang Xiqing

(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

Lü Baida

(Institute of Laser Physics and Laser Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

**Abstract:** Based on Collins integral formula, the propagation of cosine Gaussian beams passing through a first order paraxial optical system with rectangular aperture is studied. With the rectangular function converted to a sum of complex Gaussian functions, a closed form propagation expression for Gaussian beams is derived. Take a thin lens system with hard edge aperture as an example, numerical calculation is performed. The computation result conforms to that obtained by the straightforward integration of Collins formula. The principal advantage of the method is the great reduction of computing time. The method can also be applied to the propagation of other types of laser beams passing an optical system with a hard edge aperture.

**Key words:** cosine Gaussian beams; hard edge aperture; propagation

### 引 言

最近, 由 Casperson 等人证明了厄米-正弦类高斯(HSG)光束是直角坐标系下波动方程的一解, 并在理论上对其场分布、传输及产生进行了研究<sup>[1-3]</sup>。事实上, HSG 光束代表着更广泛的一类光束, 如厄米-高斯光束、双曲余(正)弦高斯光束及余(正)弦高斯光束均可视为 HSG 光束的特例。余弦高斯光束是在传输中不能保持其形状不变的一类光束。在选取适当的参数时, 可在空间某处得到近平顶分布的光束<sup>[4]</sup>, 可望在某些实际工作中得到应用。在对余弦高斯光束通过有光阑限制的  $ABCD$

光学系统的传输研究中, 由于一般情况下没有解析解, 多采用耗时很多的数值积分方法。与传统研究方法不同的是, 我们将矩形域函数表示为复高斯函数的迭加, 对余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶  $ABCD$  光学系统的传输进行了研究, 给出了在有光阑限制的情况下, 余弦高斯光束解析形式的传输公式。作为应用, 用本公式计算了在光阑孔径为有限时, 余弦高斯光束通过聚焦薄透镜的三维光强分布, 并与衍射积分的数值计算结果进行了比较, 结果一致。

### 1 理论推导

1.1 余弦高斯光束通过一阶  $ABCD$  光学系统的传输  
余弦高斯光束在  $z = 0$  平面上的场分布  $E_0(x_0, 0)$  为<sup>[1]</sup>:

$$E_0(x_0, 0) = A_0 \exp - \frac{x_0^2}{w_0^2} \cos(\Omega_0 x_0) \quad (1)$$

\* 西南交通大学科学研究基金和激光技术国家重点实验室资助项目。

作者简介: 王喜庆, 男, 1959 年 9 月出生。副教授, 博士研究生。主要从事激光传输变换等研究。

收稿日期: 2000-11-16

式中,  $w_0$  是高斯光束在  $x$  方向的束腰宽度,  $\Omega_0$  是与余弦项相关的参数,  $A_0$  是在  $x = 0, z = 0$  处的幅值。

当余弦高斯光束通过带有矩形光阑的一阶  $ABCD$  近轴光学系统时, 其场分布有 Collins 公式<sup>[5]</sup> 给出:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \int_{-b}^b E_0(x_0, 0) \times \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax_0^2 - 2x_0x + Dx^2)\right] dx_0 \quad (2)$$

式中,  $k = 2\pi/\lambda$  表示波数,  $\lambda$  为波长,  $b$  表示  $x$  方向上光阑的半宽度,  $A, B$  和  $D$  表示  $ABCD$  光学系统的变换矩阵元素。为了方便, 在(2)式中略去了不重要的相位因子。

将(1)式代入(2)式, 整理得:

$$E(x', z) = A_0 \sigma \sqrt{\frac{i w_0^2}{\lambda B}} \exp\left[-\frac{ikD}{2B}x'^2\right] \times \int_{-1}^1 \cos(\alpha \xi) \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \sigma^2 \xi^2 + \frac{ikw_0^2}{B} x' \xi\right] d\xi \quad (3)$$

式中,  $x' = x/w_0$  为归一化坐标,  $\xi = x_0/b$ ,  $\sigma = b/w_0$  为截断参数,  $\alpha = \Omega_0 w_0$  为调制参数。

在有光阑限制的情况下, 对光束传输等问题的研究中, 通常是对(3)式进行数值积分, 一般是很费机时的。与传统的处理方法不同, 我们引入矩形函数:

$$\text{rect}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1 \\ 0 & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

在(3)式中引入(4)式, 则(3)式变为:

$$E(x', z) = A_0 \sigma \sqrt{\frac{i w_0^2}{\lambda B}} \exp\left[-\frac{ikD}{2B}x'^2\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\xi) \cos(\alpha \xi) \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \sigma^2 \xi^2 + \frac{ikw_0^2}{B} x' \xi\right] d\xi \quad (5)$$

用文献[6]类似的方法, 可将矩形函数  $\text{rect}(\xi)$  用高斯函数展开:

$$\text{rect}(\xi) = \sum_{n=1}^N A_n \exp(-B_n \xi^2) \quad (6)$$

式中,  $A_n, B_n$  分别为展开系数和高斯系数, 可由计算机优化得到。将(6)式代入(5)式, 积分并整理得:

$$E(x', z) = A_0 \sigma \sqrt{\frac{i w_0^2}{\lambda B}} \exp\left[-\frac{ikD}{2B}x'^2\right] \times$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\sqrt{\left(1 + \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \sigma^2 + B_n}} \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{k^2 w_0^4}{4B^2} x'^2\right) \sigma^2}{\left(1 + \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \sigma^2 + B_n}\right] \times \cos\left[\frac{(ikw_0^2/2B) \sigma^2 \alpha x'}{\left(1 + \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \sigma^2 + B_n}\right] \quad (7)$$

(7)式即为余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶  $ABCD$  光学系统的传输公式, 是我们所得的主要解析结果。下面以光束通过有硬边光阑的聚焦薄透镜系统的传输为例说明(7)式的应用。

### 1.2 光束通过有硬边光阑薄透镜的传输

当焦距为  $f$  的薄透镜及  $x$  方向上宽度为  $b$  的矩形光阑位于  $z = 0$  平面( $RP_1$ )时, 其光学系统的变换矩阵为:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z & (1 + \Delta z)f \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\Delta z = (z - f)/f$ ,  $z$  为光束出射面  $RP_2$  所在平面。将(8)式代入(7)式, 整理得:

$$E(x', z) = A_0 \sigma \sqrt{\frac{i\pi N_f}{\lambda}} \exp\left[-\frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z} x'^2\right] \times \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\sqrt{\left(1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z}\right) \sigma^2 + B_n}} \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\pi^2 N_f^2}{1 + \Delta z} x'^2\right) \sigma^2}{\left(1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z}\right) \sigma^2 + B_n}\right] \times \cos\left[\frac{\frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z} \sigma^2 \alpha x'}{\left(1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z}\right) \sigma^2 + B_n}\right] \quad (9)$$

式中,  $N_f = w_0^2/\lambda f$  为光束的菲涅耳数。

### 1.3 数值计算与分析

由(1)式得到  $z = 0$  平面上的光强分布为:

$$I_0(x'_0, 0) = A \exp(-2x'_0{}^2) \cos^2(\alpha x'_0) \quad (10)$$

式中,  $x'_0 = x_0/w_0$  为归一化坐标。

利用(10)式计算了  $z = 0$  平面上的光强  $I(x_0, 0)$  随参数  $\alpha$  的变化情况, 如图1所示。由图1及(1)式、(10)式可以看出, 余弦项对振幅和光强起调制作用, 对振幅和光强的调制角频率分别为  $\alpha$  和  $2\alpha$ , 故可称  $\alpha$  为调制参数。由图1还可以看出, 由于基模高斯光束( $\alpha = 0$ )是余弦高斯光束的包络, 相当于光

阑为无限大的最小截断参数  $\sigma$  ( $\sigma = 2.1$ ) 与基模高斯光束的相同<sup>[7]</sup>, 即对余弦高斯光束而言当截断参数  $\sigma > 2.1$  时, 便可认为光阑为无限大。相当于光阑为无限大的最小截断参数  $\sigma$  与参数  $\alpha$  无关, 这与双曲余弦高斯光束是不同的<sup>[4]</sup>。

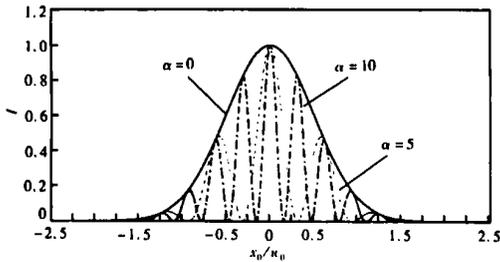


Fig. 1 Intensity distributions of cosine Gaussian beams at  $z = 0$  plane

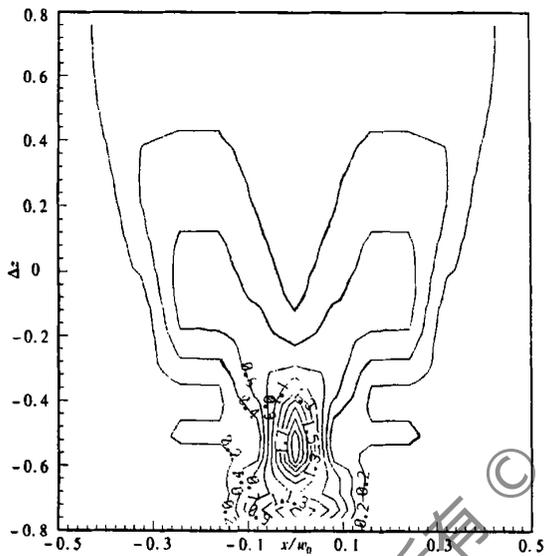


Fig. 2 Isophote diagrams of a focusing cosine Gaussian beam by an aperture lens — Collins diffraction integral  
 $N_f = 5, \alpha = 5, \sigma = 0.5$

利用(9)式计算了截断参数  $\sigma$  为有限时的等光强分布图(等照线图)并与直接由 Collins 衍射积分公式所作的数值计算进行了比较, 如图 2 所示。由图 2 可以看出, 由我们所得解析式(9)的计算结果与直接由 Collins 衍射积分公式所作的数值计算结果一致。在对图 2 的计算中, 使用联想奔月 4000 PII/500 由 Collins 公式直接作数值积分所用的 CPU 机时为 127s, 而用(9)计算式所用的 CPU 机时仅 1s, 由此可见, 用我们所给的解析公式计算能节约大量机时。

## 2 小结

基于将矩形域函数表示为复高斯函数的迭加及 Collins 积分公式, 得到了余弦高斯光束通过具有硬边光阑的一阶 ABCD 光学系统传输场分布的解析公式。作为应用例, 计算了余弦高斯光束通过有限尺寸光阑薄透镜系统聚焦后的等照线图, 利用我们的解析公式所得结果与直接从 Collins 公式的衍射积分结果能非常好地吻合, 并讨论了调制参数对余弦高斯光束的影响。我们的方法还可用于笛卡尔坐标系下其它光束的讨论。所得的解析公式可为分析余弦高斯光束在通过有光阑限制的光学系统的传输特性提供极大的方便。

## 参 考 文 献

- [1] Casperson L W, Hall D J. J O S A, 1997, A14(12): 3341.
- [2] Casperson L W, Tovar A A. J O S A, 1998, A15(4): 954.
- [3] Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1998, A15(9): 2425.
- [4] Lü B D, Ma H, Zhang B. Opt Commun, 1999, 166(4): 165.
- [5] Collins S A. J O S A, 1970, A60(9): 1168.
- [6] Wen J J, Breazeale M A. J Acoust Soc Amer, 1988, 83(5): 1752.
- [7] Belland P, Crenn J P. Appl Opt, 1982, 21: 522.

(上接第 228 页)

## 参 考 文 献

- [1] 周振丰, 张文钺. 焊接冶金与金属焊接性. 北京: 机械工业出版社, 1988.
- [2] 中国机械工程学会焊接学会. 焊接手册(第 2 卷), 材料的焊接. 北京: 机械工业出版社, 1992.
- [3] 崔忠圻. 金属学与热处理(铸造、焊接专业用). 北京: 机械工业出版社, 1989.
- [4] 闫毓禾, 钟敏霖. 高功率激光加工及其应用. 天津: 天津科学技术出版社, 1994.
- [5] 王家金. 激光加工技术. 北京: 中国计量出版社, 1992.