

文章编号: 1001-3806(2002)02-0156-03

## 瞬态非傅里叶导热效应判据的探讨\*

余宁<sup>1</sup> 潘健生<sup>1</sup> 顾剑锋<sup>2</sup> 胡明娟<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>上海交通大学国家教育部高温材料及高温测试开放实验室,上海,200030)

(<sup>2</sup> Troyes University, Troyes Cedex, 10010)

**摘要:** 讨论了通用傅里叶导热定律的数学模型,推导了半无限大物体在第一类边界条件下的基于非傅里叶导热定律的双曲线型偏微分方程的解析解。通过分析非傅里叶导热定律在瞬态条件下温度分布的变化过程,提出了非傅里叶导热效应的瞬态判据以及非傅里叶导热的作用范围,对研究工程中瞬态导热问题(如激光处理,电子束处理等)有重要意义。

**关键词:** 非傅里叶导热效应;瞬态判据;数学模型

**中图分类号:** O438.2 **文献标识码:** A

### Transient criterion of non-Fourier heat conduction law

Yu Ning<sup>1</sup>, Pan Jiansheng<sup>1</sup>, Gu Jianfeng<sup>2</sup>, Hu Mingjuan<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Key Laboratory for High Temperature Materials & Testing of Ministry of Education, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030)

(<sup>2</sup> Troyes University, Troyes Cedex, 10010)

**Abstract:** The mathematical model of general Fourier heat conduction law is discussed in the paper. Based on the hyperbolic heat conduction equation of non-Fourier heat conduction law, an analytical solution of a semi-infinite body has been derived under the first boundary condition. With the temperature distribution analyzed, the transient criterion and the applicable scope of non-Fourier heat conduction law has been proposed, which is important for the study on special area of transient heat conduction problem in engineering, such as laser process and electron beams process.

**Key words:** non-Fourier heat conduction law; transient criterion; mathematical model

## 引言

自从 17 世纪傅里叶建立了导热的数学模型,傅里叶导热定律广泛应用于各个领域,并取得巨大成功,正确反映实际生产和工程中的传热计算<sup>[1]</sup>。几乎所有现行传热计算均是建立在傅里叶导热定律基础上。傅里叶导热定律作为热传导理论的本构方程描述了热流量和温度分布之间的关系,其数学表达式为抛物线型偏微分方程,假设条件之一是认为热是无限大速度的扩散行为。但是在 40 年代,人们发现在液氦温度附近热以 19m/s 的速度传递,进一步研究这一现象,指出热实质上是以有限速度运动的波行为,从而提出了非傅里叶导热定律,其数学表达式为双曲线型偏微分方程<sup>[2,3]</sup>。由于热波行为性质

使热扰动和热响应存在时间迟滞,即存在弛豫时间<sub>0</sub>,根据这一时间变量推出了热波速度表达式。和傅里叶导热定律相比,非傅里叶导热定律有特殊的应用领域,主要适用于瞬态导热条件。Tamma 把满足非傅里叶导热定律的传热现象称为非傅里叶效应<sup>[4]</sup>。

近年来,非傅里叶导热研究正逐渐成为热点<sup>[5~6]</sup>。Morse 和 Feshbach 提供了通用傅里叶导热定律数学表达式<sup>[7]</sup>,综合考虑了非傅里叶导热和傅里叶导热特点。非傅里叶导热定律适用于瞬态条件,但什么状态可以认为是瞬态,并没有文献报道。什么条件适用非傅里叶导热,什么条件适用傅里叶导热,没有一个合适的判据。我们根据双曲线型偏微分方程解析解分析,提出了非傅里叶导热定律应用的判据。

## 1 瞬态导热数学模型

根据能量守恒定律,热传递方程可表达为:

$$\partial T / \partial t + \nabla \cdot q = 0 \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金项目。

作者简介:余宁,男,1972 年出生。博士研究生。从事材料数值模拟研究。

收稿日期:2000-11-20;收到修改稿日期:2001-01-26

$$q = -k \nabla T \quad (2)$$

得到经典傅里叶导热方程的抛物线型偏微分方程表达式:

$$\partial T / \partial t - \nabla^2 T = 0 \quad (3)$$

Morse, Feshbach 提出当考虑热运动速度, 傅里叶定律修正为非傅里叶导热定律:

$$q = -k \nabla T - \tau_0 \partial q / \partial t \quad (4)$$

于是可得到非傅里叶导热方程的双曲线型偏微分方程表达式:

$$\tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad (5)$$

非傅里叶导热定律增加了一项  $\tau_0 \partial q / \partial t$ , 这是由于介质内温度场重新建立和温度梯度改变滞后热扰动, 弛豫时间内热流密度发生了  $\tau_0 \partial q / \partial t$  的改变量。(4) 式又称为通用傅里叶定律, 当不考虑弛豫时间的影响时即为傅里叶定律。弛豫时间取决于热扩散率和热波的运动速度,  $\tau_0 = \sqrt{\tau / c_h}$  (6) 式中,  $\tau$  为热扩散率,  $c_h$  为热波运动速度。

## 2 简单瞬态导热的非傅里叶解析解

为了探讨瞬态导热条件下, 介质内部温度场的变化特征, 以简单的半无限大物体在第一类边界条件下的瞬态导热为例, 推导其解析解, 并对结果进行分析和讨论。

考虑一维半无限大物体, 第一类边界条件, (5) 式可变为:

$$\tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < \infty, t > 0 \quad (7)$$

初始条件和边界条件为:

$$T(x, t) |_{x=0} = T_w \quad t > 0 \quad (8)$$

$$T(x, t) |_{t=0} = T_0 \quad 0 < x < \infty \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} |_{t=0} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad (10)$$

假设无量纲变量:

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_w - T_0}, \quad \tau = \frac{c_h^2 t}{\tau}, \quad \xi = \frac{c_h x}{\tau}$$

$$(7) \text{ 式可变为: } \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (11)$$

对上式进行拉普拉斯变换和反拉普拉斯变换, 解得双曲线型偏微分方程的解的表达式:

$$\theta = u(\xi - \tau) \left[ e^{-\xi} + e^{-\xi} I_1 \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - \xi^2}{2}} \right) \right] \quad (12)$$

式中,  $u(\xi - \tau)$  为单位函数, 当  $(\xi - \tau) > 0, u = 1$ ; 当  $(\xi - \tau) < 0, u = 0$ 。  $I_1$  是第一类修正贝塞尔函数。上式展开还原表示为:

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_w - T_0} = u \left( \frac{c_h x}{\tau} - \frac{c_h x}{\tau} \right) \left[ e^{-\frac{c_h x}{\tau}} + \dots \right]$$

$$\frac{c_h x}{2} \frac{c_h^2 t}{2} e^{-\frac{c_h x}{2} \sqrt{\frac{c_h^2 t}{2}}} I_1 \left[ \frac{c_h x}{2} \sqrt{\frac{c_h^2 t}{2}} \right] \quad (13)$$

## 3 分析和讨论

根据(12)式和(13)式可以得到瞬态导热条件下半无限大物体表面温度突然变化到  $T_w$  时, 物体内部各点的温度随时间的变化。以常见的材料碳钢为例, 热扩散率  $\tau = 8.086 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , 弛豫时间  $\tau_0 = 10^{-10} \text{ s}$ 。图 1 为利用傅里叶和非傅里叶导热定律得到的碳钢表层各点温度随时间的变化的比较。从中可看出, 假设热是无限大速度传播, 按照傅里叶导热定律计算的温度分布呈连续性曲线, 由于热量传递, 内部温度低于表面温度。

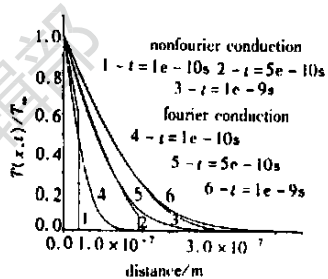


Fig. 1 Comparison of the dimensionless temperature distribution between Fourier and non-Fourier heat

假设热是有限速度波运动, 按照非傅里叶导热定律计算的温度分布是间断曲线, 存在一个阶跃, 把介质内部分为热影响区和非热影响区。热波运动到的区域温度发生变化, 热波未到达的区域由于没有热量流入, 温度没有发生变化, 仍保持初始温度, 两区域交界处温度陡降, 温度梯度很大。这是由于热波的有限速度造成的, 介质内温度间断处即为热波波前达到位置。由于介质内波前处两侧温度悬殊, 对材料有热冲击效应<sup>[8]</sup>。

从图 1 可以看出, 随着时间的延长, 非傅里叶导热效应正在逐步减弱, 呈现出傅里叶导热的特征, 温度阶跃随时间增加而减小, 最后与傅里叶导热温度分布曲线完全吻合。这证明在稳态导热条件下, 运用傅里叶导热定律是正确的, 与傅里叶导热模型建立的前提条件相一致。而在极短时间的瞬态条件下则非傅里叶导热定律更能准确反映温度场的变化。

从图 1 可以进一步看出, 当热作用时间等于 10 倍弛豫时间时, 非傅里叶导热定律的温度曲线与傅里叶导热曲线基本重合, 因此, 可以认为当热作用时间大于 10 倍弛豫时间, 瞬态导热可以不考虑非傅里叶导热效应。一般金属材料的弛豫时间在  $10^{-10} \text{ s}$  左右, 通常工程中热作用时间都远大于  $10^{-10} \text{ s}$ , 所以, 在常见的加热方式中不会有非傅里叶效应出现。

但在激光、电子束等高能密度加热方式中,由于加热时间极短,输入能量密度高,则有可能需要考虑以非傅里叶导热定律来计算瞬态温度分布。

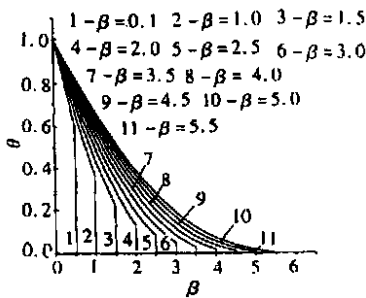


Fig. 2 Comparison of the dimensionless temperature distribution for non-Fourier heat conduction in a semi-infinite body

不考虑具体材料的热扩散率和弛豫时间,按照(12)式计算,可以得到非傅里叶导热条件下过余温度随无量纲时间向量增加而变化过程,如图2。当值很小时,非傅里叶效应明显,随着增大,温度曲线的阶跃逐渐减小,非傅里叶效应减弱。当=5时,即 $t=10\tau_0$ 时,温度分布曲线上已看不出温度阶跃的存在,温度分布从非傅里叶导热转变为傅里叶导热。国内学者在讨论球状瞬态导热时也得到相似结论<sup>[9]</sup>。温度曲线上发生阶跃的温度呈指数下降,阶跃的高度等于

$$e^{-\frac{c_h t}{2}}$$

图3是傅里叶导热条件下碳钢不同位置温度分布随时间的变化过程,温度曲线连续平滑,各点温度变化保持同步,最初阶段温度变化幅度大,温度达到一

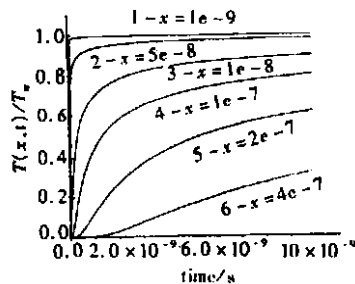


Fig. 3 Comparison of dimensionless temperature distribution at various positions for Fourier heat conduction in a steel

定平台后,变化幅度减小,并趋于稳定,从瞬态过渡到稳态。图4是非傅里叶导热条件下半无限大物体各个位置过余温度随无量纲时间的变化,温度曲线有阶跃存在,各点温度变化并不一致,距离介质表面最近的部分最先对热扰动有反映,稍远位置热反映要滞后一段时间,即热波从表面运动到该处的时间,热波到达该处后温度跳跃上升,然后缓慢升高。从图3还可以发现, $t=10^{-10}$ s时的傅里叶导热温度分布曲线与后面时刻的温度分布曲线不同,类似于图4中的非傅里叶导热温度分布曲线。这从另一个角度反映出傅里叶导热在极短时间内有非傅里叶效应的特征。随着与表面距离增大,介质内部温度阶跃幅度减少,

温度分布呈傅里叶导热特征,非傅里叶效应减弱。当无量纲距离等于5时,温度分布曲线中的非傅里叶效应特征基本消失。这说明判断非傅里叶效应除了有时间指标还有距离指标,两者存在相互联系。

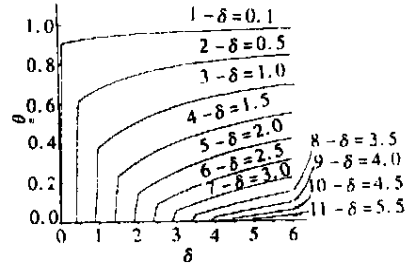


Fig. 4 Comparison of dimensionless temperature distribution at various positions for non-Fourier heat conduction in a semi-infinite body

根据(12)式可以确定值和值的关系,当热作用时间 $t=10\tau_0$ ,即 $\beta=5$ 时,非傅里叶效应不明显,只要 $\delta < 5$ ,单位函数等于1,温度计算按照非傅里叶导热定律计算,而 $\delta > 5$ 时,单位函数为0,非傅里叶导热的温度解析式不成立,此时,非傅里叶效应影响的最大无量纲距离值和无量纲时间值均等于5。

因此,可以得到热波波前消失处与介质表面的距离,结合无量纲变量定义和(7)式可以将距离表示为 $x=10\tau_0$ 。根据这一表达式计算碳钢的非傅里叶效应作用范围,距离的数量级在 $10^{-8}$ m。这说明非傅里叶效应发生主要取决于材料的弛豫时间和热扩散率,即热波速度。

对于常见的碳钢材料由于弛豫时间极小,非傅里叶效应发生在介质表层,但对于有机材料的弛豫时间较大( $\tau_0=10$ s,  $\alpha=10^{-7}$ m<sup>2</sup>/s),非傅里叶效应发生的最大距离可以达到 $10^{-3}$ m数量级。由此可见,对于一般的工程应用,运用傅里叶导热定律完全满足要求,但对于小尺寸的零件、集成电路、纳米材料、薄膜材料等计算热量传递时则必须考虑非傅里叶效应。

### 4 结论

傅里叶导热定律适用于稳态导热,非傅里叶适用于瞬态导热,非傅里叶导热温度分布曲线是间断的,傅里叶导热温度分布曲线是连续的。非傅里叶导热定律更真实反映物体遭受温度突变初始瞬间材料表层的温度分布。当热作用时间大于材料弛豫时间10倍时,非傅里叶导热效应减弱,温度分布计算可按照傅里叶导热定律。当热作用时间小于10倍

(下转第143页)

外一个暗光斑的出射方向同入射光方向不平行,光强分布图如图 7 和图 8 所示。用探测器接收的入射光和反射光波

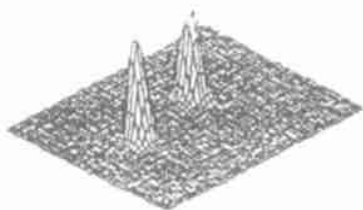


Fig. 7 Intensity distribution of two light mottling

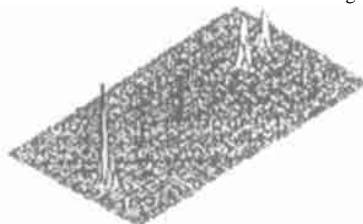


Fig. 8 Intensity distribution of three light mottling

$T_1 = 15\text{ms}$ , 脉冲“组”的载波周期  $T_2 = 1\text{ms}$ , 同调制盘

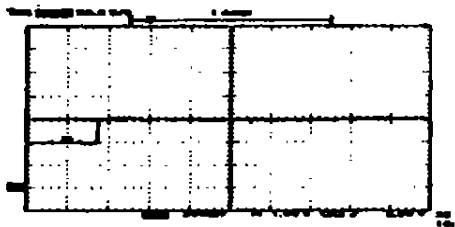


Fig. 9 Wave form of irradiation laser

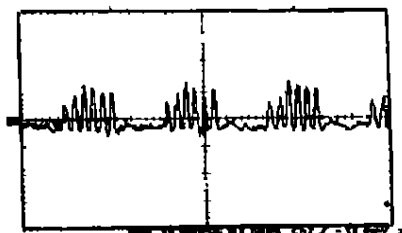


Fig. 10 Reflected wave from front plane of modulating disk

的调制特性基本相吻合。而调制盘后表面和错滤光片动态反射光由于再次经过调制盘前表面的调制,调制波形和频率都有所变化。

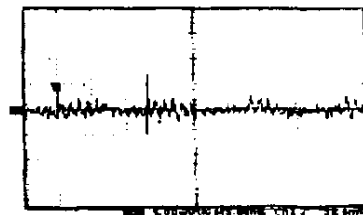


Fig. 11 Reflected wave from back plane of modulating disk

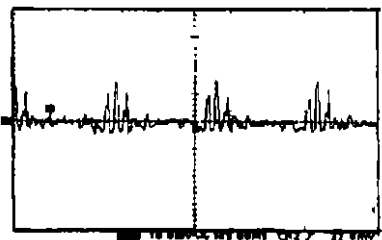


Fig. 12 Reflected wave from Ge-filter

### 3 结 论

激光对红外系统的后向反射光具有较高的实际意义,由调制盘前表面产生的后向反射光具有方向性好、光强度高、光束发散小等优点,并具有独特的波形特征,可以用于对红外系统的准确跟踪、目标识别,在军事和民用方面可发挥重要作用。

### 参 考 文 献

- [1] Carroll S. J Electronic Defense, 1999, 22(9) :45 ~ 46.
- [2] Craing M. J Electronic Defense, 1994(1) :47 ~ 48.
- [3] 付 伟. 红外技术, 1997, 19(1) :6 ~ 8.
- [4] 陈玻若. 红外系统. 北京:兵器工业出版社, 1995.

(上接第 158 页)

材料弛豫时间时,非傅里叶导热效应明显,温度分布计算按照非傅里叶导热定律。非傅里叶效应作用距离很小,对于半无限大物体,其深度取决于热扩散率和弛豫时间,表达式为  $x = 10 \sqrt{\quad}_0$ 。

### 参 考 文 献

- [1] 杨世铭. 传热学. 北京:高等教育出版社, 1987.
- [2] Atkins K R. Liquid Helium. England: Cambridge University

Press, 1959.

- [3] Peshkov V. J Physics, 1985, 8:381.
- [4] Kumar K T, Raju R N. J Thermophysics, 1991, 5(2) : 232 ~ 239.
- [5] Morse P M, Feshbach H. Method of Theoretical Physics. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [6] Shih T M. Numerical Heat Transfer, 1985, 8(1) : 1 ~ 24.
- [7] Eckert E R G, Goldstein R J, Ibele W E *et al.* J Heat Mass Transfer, 1994, 37 (9) :1285 ~ 1375.
- [8] Tzou T Y. Transaction of the ASME, 1989, 111(2) : 232 ~ 238.
- [9] 张 浙, 刘登瀛. 工程热物理学报, 1998, 19(5) :601 ~ 605.