

文章编号: 1001-3806(2002)02-0153-03

厄米-双曲余弦-高斯光束的束腰宽度*

王莉 王喜庆

吕百达

(西南交通大学应用物理系,成都,610031)

(四川大学激光物理与化学研究所,成都,610064)

摘要: 从二阶矩定义出发,推导出了厄米-双曲余弦-高斯光束束腰宽度的解析表达式,作为特例给出了厄米-余弦-高斯光束、双曲余弦-高斯光束、余弦-高斯光束及厄米-高斯光束束腰宽度的表达式;进行了数值计算及分析。

关键词: 厄米-双曲余弦-高斯光束;厄米-余弦-高斯光束;双曲余弦-高斯光束;余弦-高斯光束;束腰宽度

中图分类号: O435 **文献标识码:** A

Waist width of Hermite-cosh-Gaussian beams

Wang Li, Wang Xiqing

(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

L Übaida

(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: Based on the second-order moment method, the closed form expression of the waist width of Hermite-cosh-Gaussian beams is derived. For example, the closed form expressions of the waist width for Hermite-cosine-Gaussian, cosh-Gaussian, cosine-Gaussian and Hermite-Gaussian beams are also provided. Numerical calculations are performed and the results are analyzed.

Key words: Hermite-cosh-Gaussian beam; Hermite-cosine-Gaussian beam; cosh-Gaussian beam; waist width

引言

近年来, Carsperson 等人证明了厄米-正弦类-高斯(HSG)光束是波动方程的一组解,并可在实验室用正弦类-高斯切趾光阑或用带有变反射率镜的谐振腔来产生该类光束^[1~3]。这类光束包含了许多光束。例如厄米-双曲余弦-高斯(HChG)光束,厄米-余弦-高斯(HCsG)光束,双曲余弦-高斯(ChG)光束及余弦-高斯(CsG)光束等等。对 HChG 光束、ChG 光束及 CsG 光束已经进行了广泛的研究^[4~6],光束在通过光学系统时不可避免地要受到光学器件的尺寸限制,因此,对这类光束的束腰尺寸进行研究讨论是有意义的。我们从二阶矩的定义出发,对 HChG 光束的束腰进行了讨论,给出了 HChG 光束的束腰宽度表达式,作为特例得到了 HCsG 光束、CsG 光束、ChG 光束及厄米-高斯光束束腰宽度的表达式,并作了数值计算和讨论。

* 西南交通大学校科技发展基金资助项目。

作者简介:王莉,女,1960年10月出生。副教授。主要从事激光光束传输变换等研究及教学工作。

收稿日期:2001-05-08;收到修改稿日期:2001-06-05

1 理论推导

HChG 光束在 $z=0$ 平面上的场分布为^[2]:

$$E(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] H_n\left[\sqrt{2}\frac{x}{w_0}\right] \cosh(\beta_0 x) \quad (1)$$

式中, w_0 为高斯振幅分布的束腰宽度, H_n 为 n 阶厄米多项式, β_0 为与 \cosh 项相关的参数, \cosh 为双曲余弦函数。双曲余弦函数可写为:

$$\cosh(\beta_0 x) = \frac{\exp(\beta_0 x) + \exp(-\beta_0 x)}{2} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式整理得:

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{\beta_0^2 x^2}{4}\right] H_n^2\left[\sqrt{2}\frac{x}{w_0}\right] \times \left\{ \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0} - \frac{\beta_0}{2}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0} + \frac{\beta_0}{2}\right)^2\right] \right\} \quad (3)$$

式中, $\beta_0 = \beta_0 w_0$ 是离心参数。在 $z=0$ 平面上 HChG 光束的光强为:

$$I(x, 0) = E(x, 0) E^*(x, 0) \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式整理得:

$$I(x, 0) = \frac{1}{4} \exp\left[\frac{\beta_0^2 x^2}{2}\right] H_n^4\left[\sqrt{2}\frac{x}{w_0}\right] \times \left\{ \exp\left[-\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_0} - \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_0} + \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \right\} +$$

$$2 \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right)^2\right] \quad (5)$$

由空间域的二阶矩定义^[7]:

$$\sigma_x^2 = \frac{\int (x - \bar{x})^2 I(x, 0) dx}{\int I(x, 0) dx} \quad (6)$$

式中, $\bar{x} = \frac{\int x I(x, 0) dx}{\int I(x, 0) dx}$ 为空间域的一阶矩, 由于 HChG 光束的对称性, $\bar{x} = 0$ 。将(5)式代入(6)式, (6)式变为:

$$\sigma_x^2 = (F^+ + F^- + F^0) / (G^+ + G^- + G^0) \quad (7)$$

式中, $F^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 H_n^2 \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \times \exp\left[-\frac{x^2}{2} \pm \frac{x^2}{2}\right] dx \quad (8)$

$$F^0 = 2 \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} x^2 H_n^2 \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \times \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right)^2\right] dx \quad (9)$$

$$G^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \times \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0} \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dx \quad (10)$$

$$G^0 = 2 \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \times \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right)^2\right] dx \quad (11)$$

利用厄米多项式的递推公式:

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x) \quad (12)$$

及积分公式^[8]:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{2n + 1 + \frac{2[L_n(-x^2) + 2n!(L_n^2(-x^2) - L_n^1(-x^2))]}{L_n(-x^2) + n! \exp(-x^2/2)}} \quad (21)$$

由(21)式可以看出, HChG 光束的束腰宽度与厄米函数的阶数 n 以及离心参数 m 有关, 其变化关系难于直接由(21)式看出, 但可根据后面的数值计算来分析。

2 特例

2.1 HCsg 光束的束腰宽度

利用双曲余弦函数与余弦函数的关系:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{2n + 1 + \frac{2[L_n(x^2) + 2n!(L_n^2(x^2) - L_n^1(x^2))]}{L_n(x^2) + n! \exp(x^2/2)}} \quad (25)$$

当 $n=1, 2, 3$ 时, HCsg 光束的束腰宽度分别为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_m(x) H_n(x) dx =$$

$$2^n \sqrt{m! y^{n-m} L_m^{n-m}(-2y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_n(x) dx =$$

$$\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n & n! \quad m = n \end{cases} \quad (14)$$

经复杂的运算, 并整理(8)式~(11)式为:

$$F^\pm = \frac{w_0^3}{4} 2^n \{(2n+1 + \frac{x^2}{2}) L_n(-\frac{x^2}{2}) + 2n! [L_n^2(-\frac{x^2}{2}) - L_n^1(-\frac{x^2}{2})]\} \quad (15)$$

$$F^0 = \frac{w_0^3}{2} 2^n \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] n! (2n+1) \quad (16)$$

$$G^\pm = \frac{w_0}{4} 2^n L_n(-\frac{x^2}{2}) \quad (17)$$

$$G^0 = \frac{w_0}{2\sqrt{2}} 2^n \sqrt{\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]} n! \quad (18)$$

式中, L_n^1 及 L_n 分别为缔合拉盖尔函数和拉盖尔函数。

将(15)式~(18)式代入(7)式, 整理得:

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4} \{2n + 1 + \frac{2[L_n(-x^2) + 2n!(L_n^2(-x^2) - L_n^1(-x^2))]}{L_n(-x^2) + n! \exp(-x^2/2)}\} \quad (19)$$

(19)式即为 HChG 光束在 x 方向的空间二阶矩。根据二阶矩定义的束腰宽度^[9]:

$$w_x = 2 \sigma_x \quad (20)$$

将(19)式代入(20)式得:

$$\cosh(ix) = \cos(x) \quad (22)$$

$$\text{令 } i = i \quad (23)$$

将(23)式代入(1)式, 得到 HCsg 光束在 $z=0$ 平面上的场分布:

$$E(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \cos\left(\frac{x}{w_0}\right) \quad (24)$$

式中, $\frac{x}{w_0}$ 称为调制参数^[9]。将(23)式代入(21)式, 即得到 HCsg 光束的束腰宽度:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{3 + \frac{4 - 3^2}{1 + \exp(-2/2)}} \quad (n = 1) \tag{26}$$

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{5 + \frac{-6 + 8^4 - 14^2}{4 - 4^2 + 2 + 2\exp(-2/2)}} \quad (n = 2) \tag{27}$$

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{7 + \frac{8 - 15^6 + 66^4 - 78^2}{6 + 9^4 - 18^2 + 6 + 6\exp(-2/2)}} \quad (n = 3) \tag{28}$$

当 α 时,由于 $\exp(-2/2)$ 比 $L_n(-2)$ 随 α 增大而增大快得多,所以,当 α 时, $w_{0x} \approx w_0 \sqrt{2n+1}$, 即当 α 时,HCsG 光束的束腰宽度等于其对应的厄米-高斯光束的束腰宽度。实际上并不需要 α 足够大,只要 α 足够大就有 $w_{0x} \approx w_0 \sqrt{2n+1}$ 。

2.2 $n=1,2,3$ 时, HChG 光束的束腰宽度

(21) 式给出的是具有广泛意义的 HChG 光束的束腰宽度,当 $n=1,2,3$ 时,由 (21) 式可以得到其具体 HChG 光束的束腰宽度分别为:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{3 + \frac{4 + 3^2}{1 + \exp(-2/2)}} \quad (n = 1) \tag{29}$$

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{5 + \frac{6 + 8^4 + 14^2}{4 + 4^2 + 2 + 2\exp(-2/2)}} \quad (n = 2) \tag{30}$$

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{7 + \frac{8 + 15^6 + 66^4 + 78^2}{6 + 9^4 + 18^2 + 6 + 6\exp(-2/2)}} \quad (n = 3) \tag{31}$$

2.3 双曲余弦(余弦)-高斯光束的束腰宽度

令 $n=0$, 则 HChG 光束退化为 ChG 光束,由 (21) 式得到双曲余弦-高斯光束的束腰宽度为:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{2 + \frac{2}{1 + \exp(-2/2)}} \tag{32}$$

在 (24) 式中,令 $n=0$, 则 HCsG 光束退化为余弦-高斯光束,由 (25) 式得到余弦-高斯光束的束腰

宽度为: $w_{0x} = w_0 \sqrt{2 - \frac{2}{1 + \exp(2/2)}} \tag{33}$

2.4 厄米-高斯光束的束腰宽度

令 $n=0, \alpha=0$, 则 HChG 光束退化为厄米-高斯光束,由 (21) 式得到厄米-高斯光束的束腰宽度:

$$w_{0x} = w_0 \sqrt{2n+1} \tag{34}$$

这一结果与文献[10]中(3.2-1)式完全相同。

3 数值计算与分析

图 1 是 HChG 光束束腰随离心参数 α 的变化情况,其中 $n=0$ 表示 ChG 光束束腰随离心参数的变化情况。由图 1 可以看出, HChG 光束的束腰宽度是 HChG 光束的阶数 n 、离心参数 α 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数, ChG 光束的束腰宽度是离心参数 α 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数, HChG 光束和 ChG 光束的束腰宽度随离心参数和阶数 n 的增大而增加。

图 2 是 HCsG 光束束腰随调制参数 β 的变化情况,其中 $n=0$ 表示 CsG 光束束腰随调制参数 β 的

变化情况。由图 2 可以看出, HCsG 光束的束腰宽度是 HCsG 光束的阶数 n 、调制参数 β 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数, CsG 光束的束腰宽度是调

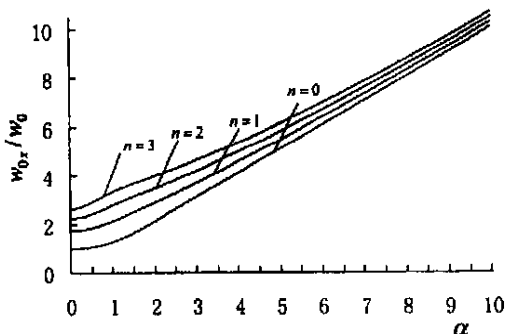


Fig. 1 The waist width of HChG beams as a function of decentered parameter

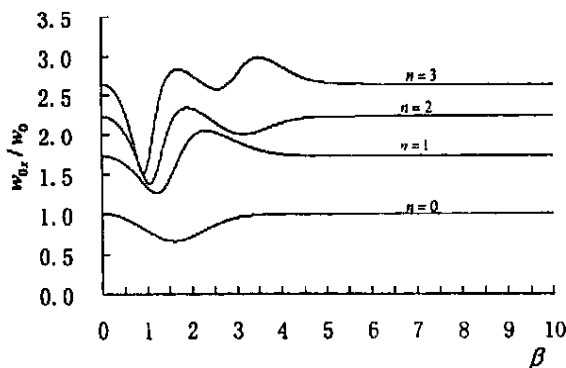


Fig. 2 The waist width of HCsG beams as a function of modulated parameter

(下转第 149 页)

动物体(如飞机等)上的安装位置。从应用角度看,主要是提出角反射器的设计要求和安装要求。当满足了提出的要求后,就可保证激光跟踪设备在规定的移动范围内准确瞄准目标,也即保证回波概率。

(a)角反射器接收角的影响和选择:角反射器接收角越大,跟踪设备瞄准目标的移动范围越大,即在目标移动的大范围内也能保证足够高的回波概率,故应选择大的接收角。但接收角过大将导致设计、制造困难,成本增高。一般在满足目标运动范围要求条件下,选择大的接收角。通常,角反射器阵列的接收角可达到 $\pm 75^\circ$ 左右。其它指标:角反射器面积(尺寸)、反射率、反射波束角宽度也是应用中重要的指标。限于篇幅,这里不作讨论。

(b)角反射器安装位置与方向:角反射器在目标上的安装位置与目标运动区域、跟踪设备的相互位置有关,若设计不当,则跟踪设备瞄不准目标,就接收不到回波,回波概率就无从谈起。安装设计考虑原则是:目标在规定的运动范围内,角反射器所处位置、方向,应使角反射器(阵列)的接收角能覆盖住跟踪设备。具体安装位置、方向可按具体使用要求,几何关系计算得到。

2 某型号激光跟踪雷达试验结果

某型号激光跟踪雷达的研制过程中,成功的运用了上述分析和系统设计方法。激光跟踪雷达具备

(上接第 155 页)

制参数 β 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数,在调制参数较小时,束腰宽度随调制参数的变化是非单调的。当 β 值较大(如 $n=0$, $\beta=4.825$, $n=1$, $\beta=6.100$, $n=2$, $\beta=6.750$, $n=3$, $\beta=7.250$) 时,其束腰宽度等于其同阶的厄米-高斯光束的束腰宽度。

4 结 论

从二阶矩定义出发,推导出了厄米-双曲余弦-高斯光束束腰宽度的解析表达式,作为特例给出了厄米-余弦-高斯光束、双曲余弦-高斯光束、余弦-高斯光束及厄米-高斯光束束腰宽度的表达式。数值计算表明,HCsG 光束的束腰宽度是 HChG 光束的阶数 n 、离心参数 β 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数,ChG 光束的束腰宽度是离心参数 β 和高斯光束的束腰宽度 w_0 的函数,就所计算的而言,HCsG 光束和 ChG 光束的束腰宽度随离心参数和阶数 n

测距、测角功能,在红外分系统引导下,自动转入自跟踪状态,跟踪体制上,采用单脉冲激光四象限跟踪。激光跟踪雷达在室内、外场、海军试验靶场进行了多次试验,部分试验结果为:(1)对 3km 处烟囱(直径约 2m),测量结果为:随机角误差 $\sigma_A = 6s$,回波率 $P_r = 98\%$ 。(2)对 5km 处靶标(角反射器),测量结果为:随机角误差 $\sigma_A < 13.6s$,回波率 $P_r > 95\%$ 。(3)对海面船只进行激光跟踪实验与测量,对海船跟踪能长时间(10min, $f = 20\text{Hz/s}$, 40Hz/s) 稳定跟踪目标,距离为 6~8km,回波率 $P_r > 98\%$,随机角误差优于 11s。(4)对 5km 处和 21km 处靶标(20cm² 角反射器)做跟踪实验,能稳定跟踪靶标,角误差为 13.8s 左右, P_r 优于 95%。

3 结 论

(1)激光跟踪雷达多次试验结果验证了激光跟踪雷达回波概率设计方法的正确性。(2)激光跟踪雷达回波概率优于 95% 是可行的,激光主动跟踪技术已趋于成熟,具备了向工程装备转化的条件,推广应用前景是光明的。

参 考 文 献

- [1] Jelalian A V. Laser Radar Systems. 第 1 版, Norwood MA USA, Artech House: Al Jelaian, 1991.
- [2] 詹荣科. 激光与红外, 1979(5): 1~5.
- [3] 宋正方. 应用光学基础. 第 1 版, 北京: 气象出版社, 1990.

的增大而增加;对 HC_sG 光束和 CsG 光束而言,在调制参数较小时,束腰宽度随调制参数的变化是非单调的。在调制参数较大时,HC_sG 光束的束腰宽度等于其同阶厄米-高斯光束的束腰宽度。我们虽然得到的是二维的结果,但推广到三维情况是直截了当的。

参 考 文 献

- [1] Casperson L W, Hall D G J O S A, 1997, A14(12): 3341~3348.
- [2] Casperson L W, Tovar A A J O S A, 1998, A15(4): 954~961.
- [3] Tovar A A, Casperson L W J O S A, 1998, A15(9): 2425~2432.
- [4] Belafhal A, Ibnchaikh M. Opt Commun, 2000, 186: 269~276.
- [5] L ÜB D, Zhang B, Ma H. Opt Lett, 1999, 24: 640~642.
- [6] L ÜB D, Ma H, Zhang B. Opt Commun, 1999, 164: 165~170.
- [7] Siegman A E. Proc SPIE, 1990, 1224: 2~14.
- [8] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products. New York: Academic Press, 1980.
- [9] 王喜庆, 柯尊平, 吕百达. 激光技术, 2001, 25(2): 121~125.
- [10] 吕百达. 激光光学. 成都: 四川大学出版社, 1992.