第 25 卷 第 5 期
2001 年 10 月
激 光 技 术
LASER TECHNOLOGY
Vol. 25, No. 5
October, 2001

双曲余弦高斯光束的模相关和模结构分析*

张 彬 楚晓亮 吕百达
(四川大学电子信息学院, 成都, 610064) (四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 基于二阶矩方法和正交模系展开法, 推导出双曲余弦高斯光束的光束传输 M^2 因子和模相干系数的解析表达式, 从而可对双曲余弦高斯光束的模相关和模结构进行分析。提出了一种在实验室中产生双曲余弦高斯光束的简单方法。

关键词: 双曲余弦高斯光束 模相关 模结构 模相干系数 M^2 因子

Analysis of mode correlation and mode structure of cosh-Gaussian beams

Zhang Bin, Chu Xiaoliang, Lü Baida[* *]
(College of Electronic Information, Sichuan University, Chengdu, 610064)
([* *] Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: Based on the second moments method and orthogonal basis mode expansion, analytical expressions for the M^2 factor and mode coherence coefficients of cosh-Gaussian beams have been derived, thus analysis of mode correlation and mode structure of cosh-Gaussian beams is available. A simple method has been also proposed to produce cosh-Gaussian beams in the laboratory.

Key words: cosh-Gaussian beams mode correlation mode structure mode coherence coefficients M^2 factor

引 言

激光束的描述、激光模式结构、光束传输变换和激光光束质量控制一直是激光技术和激光光学中的重要基础研究工作。近年来, 随着激光的广泛应用, 特别是高功率激光技术和相关应用研究工作的迅速进展, 该领域的研究工作十分活跃。有代表性的工作为 Siegman 的 M^2 因子(光束传输因子) 理论[1]以及 Weber[2]和 Du[3, 4]等人对 M^2 因子理论的推广和模相干系数的理论和实验研究结果等。最近, Casperson 等人从 Helmholtz 方程出发, 在较为一般情况下, 推导出了厄米-正弦类-高斯(HSG) 解的存在, 并提出了用正弦类高斯光阑和光腔产生 HSG 光束的实验方法[5~7]。在 HSG 光束中, 以双曲余弦高斯(ChG) 光束最具代表性, 这是由于可通过设计 ChG 光束的光束参数来获得实际工作中所需的不同空间分布(包括平顶分布) 的光束[5~7]。我们基于 M^2 因子的一般理论, 推导出 ChG 光束 M^2 因子的解析表达式。然后, 用正交模系展开法, 给出了 ChG 光束的模相干系数公式。由 ChG 光束的这两个特征参数可对其模相关和模结构进行分析, 即可从给定的 M^2 因子计算 ChG 光束的模式数、模相干系数和权重因子。而且, 从我们的分析还得出了一个在实验室利用偏心高斯光束产生 ChG 光束的简单方法。

* 国家高技术强辐射重点实验室基金和四川大学青年基金资助项目。

1　ChG 光束的光束传输 M^2 因子

二维 ChG 光束在束腰处的场分布 $E(x,0)$ 可表示为[5]:

$$E(x,0)=\exp(-x^2/w_0^2)\cosh(\Omega_0 x) \tag{1}$$

式中, w_0 为高斯场振幅的束腰宽度, Ω_0 为双曲余弦函数的参数。为讨论方便, (1) 式中略去了对文中讨论结果不重要的常数振幅因子。

双曲余弦函数可用指数函数表示为:

$$\cosh(\Omega_0 x)=[\exp(\Omega_0 x)+\exp(-\Omega_0 x)]/2 \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,经计算得到:

$$E(x,0)=\frac{1}{2}\exp(\frac{w_0^2\Omega_0^2}{4})\{\exp[-\frac{(x-w_0^2\Omega_0/2)^2}{w_0^2}]+\exp[-\frac{(x+w_0^2\Omega_0/2)^2}{w_0^2}]\} \tag{3}$$

分析(3)式可知, ChG 光束可看成是中心位于$(w_0^2\Omega_0/2,0)$和$(-w_0^2\Omega_0/2,0)$处,具有相同的位相和束腰宽度的两束高斯光束的相干合成,由此,我们得到在实验中产生 ChG 光束的一种简单方法,即由两束位相和束腰宽度均相同的偏心高斯光束合成而得。

利用积分公式[8]:

$$\int_0^{+\infty} t^{\nu}\exp(-pt)\mathrm{d}t=\Gamma(\nu+1)p^{-\nu-1} \tag{4}$$

式中, Γ 为伽玛函数。

根据 M^2 因子的定义[1,2], 经较繁冗的积分计算可得 ChG 光束的 M^2 因子公式为:

$$M^2=4\pi\sigma_x\sigma_k=\frac{\sqrt{(1-\delta)\exp(-\delta)+(2-\delta^2)\exp(-\delta/2)+\delta+1}}{1+\exp(-\delta/2)} \tag{5}$$

式中,

$$\delta=w_0^2\Omega_0^2 \tag{6}$$

(5)式表明 ChG 光束的 M^2 因子只与 δ 有关。根据(5)式所做的数值计算结果表明, ChG 光束的 M^2 因子随着 δ 的增大而增大。当 $\delta=0$ 时, $M^2=1$, 对应于基模高斯光束的情况。

2　ChG 光束的模相干系数

众所周知,任意光束在 $z=0$ 处的光场分布 $E(x,0)$ 可展成一正交归一化模系 $\varphi_m(x)$ 的叠加:

$$E(x,0)=\sum_{m=0}^{+\infty}c_m\varphi_m(x) \tag{7}$$

式中, c_m 为模系数, m 为模阶数, 在直角坐标系中, 可将 $\varphi_m(x)$ 表示为厄米-高斯函数:

$$\varphi_m(x)=u_m\exp(-\alpha^2x^2/2)H_m(\alpha x) \tag{8}$$

式中, u_m 为归一化因子, α 与基模高斯光束束腰宽度 w_{0h} 的关系为:

$$\alpha=\sqrt{2}/w_{0\mathrm{h}} \tag{9}$$

利用厄米-高斯函数的正交性,由(7)式可得:

$$c_m=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m^*(x)E(x,0)\mathrm{d}x \tag{10}$$

将(1)式和(8)式代入(10)式,并利用积分公式[8]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)\exp[-\frac{(x-t)^2}{2u}]\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi u}(1-2u)^{m/2}H_m(\frac{x}{\sqrt{1-2u}}) \tag{11}$$

经计算得到:

$$\left.\begin{array}{l} c_m = \sqrt{\dfrac{\gamma\pi^{1/2}}{\alpha(2+\gamma)}}\exp\left[\dfrac{\delta}{2(2+\gamma)}\right]\left(\dfrac{2-\gamma}{4+2\gamma}\right)^{m/2} m!^{-1/2} H_m\left(\sqrt{\dfrac{\gamma\delta}{4-\gamma^2}}\right) \quad (m\text{ 为偶数}) \\ c_m = 0 \qquad (m\text{ 为奇数}) \end{array}\right\} \tag{12}$$

式中，

$$\gamma = w_0^2\alpha^2 \tag{13}$$

由光场部分相干理论可知，在准单色场近似下，描述部分相干光的交叉谱密度函数可表示为[4,9]：

$$W(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} c_m c_n^* \varphi_m(x_1)\varphi_n^*(x_2) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_{mn}\varphi_m(x_1)\varphi_n^*(x_2) \tag{14}$$

式中，

$$\lambda_{mn} = c_m c_n^* \tag{15}$$

此为模相干系数。

3 ChG 光束的模相关和模结构分析

在直角坐标系下，M^2 因子用模相干系数表示的公式为[4]：

$$M^2 = \sqrt{\left[\sum_{m=0}^{+\infty}(2m+1)\lambda_{mn}\right]^2 - 4\left[\sum_{m=0}^{+\infty}\sqrt{(m+1)(m+2)}\,\mathrm{Re}\,\lambda_{m,m+2}\right]^2} \Big/ \sum_{m=0}^{+\infty}\lambda_{mn} \tag{16}$$

(16) 式表明，一般而言，激光光束的 M^2 因子不仅与各模式的模相干系数有关，而且还与第 m 和第 $m+2$ 阶模式之间的模相干系数有关。

由(12)式和(15)式可得到 ChG 光束的模相干系数为：

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma\pi^{1/2}}{\alpha(2+\gamma)}\exp\left(\frac{\delta}{2+\gamma}\right)\left(\frac{2-\gamma}{4+2\gamma}\right)^m m!^{-1}\left[H_m\left(\sqrt{\frac{\gamma\delta}{4-\gamma^2}}\right)\right]^2 \tag{17}$$

$$\lambda_{m,m+2} = \frac{\gamma\pi^{1/2}}{\alpha(2+\gamma)}\exp\left(\frac{\delta}{2+\gamma}\right)\left(\frac{2-\gamma}{4+2\gamma}\right)^{m+1}[m!(m+2)!]^{-1/2}H_m\left(\sqrt{\frac{\gamma\delta}{4-\gamma^2}}\right)H_{m+2}\left(\sqrt{\frac{\gamma\delta}{4-\gamma^2}}\right) \tag{18}$$

式中，m 为偶数。

相应的归一化模相干系数或称权重因子为：

$$C_{mm} = \lambda_{mm}\Big/\sum_{m=0}^{+\infty}\lambda_{mm} \tag{19}$$

$$C_{m,m+2} = \lambda_{m,m+2}\Big/\sum_{m=0}^{+\infty}\lambda_{mm} \tag{20}$$

由以上分析可知，在考虑模式相关性的一般情况下，可将 ChG 光束展开为厄米-高斯模的叠加。进一步应用 M^2 因子概念，可对 ChG 光束的模相关和模结构进行分析，即由给定 M^2 因子(例如，由实验测得值)并选取截断数，如 $|C_{mn}| \geqslant 2\%$[10]，可求得振荡模式 m，模相干系数 λ_{mm} 和 $\lambda_{m,m+2}$，以及相应的权重因子 C_{mn} 和 $C_{m,n+2}$。具体的步骤为：由给定的 M^2 因子和(5)式作数值解求得 δ 值，将 δ 代入(17)式和(18)式得到的 λ_{mm} 和 $\lambda_{m,m+2}$，再代入(16)式令其与(5)式自洽，所得到的 λ_{mm}，$\lambda_{m,m+2}$ 和 C_{mn}，$C_{m,n+2}$ 即为 M^2 因子给定时的 ChG 光束的模相干系数和权重因子。数值计算例示于表 1。

由表 1 可知，除 $M^2=1$ 的极限情况外，ChG 光束不同模式间总是存在相关性，且不同模式间的模相干系数可正可负，但由(16)式知，不同模式间的模相关系数的贡献总是使 M^2 因子减小，而与其值的正负无关。进一步分析表 1 可知，一般来说，对于相同的 M^2 因子，ChG 光束的模结构方式不是唯一的，而依赖于参数 γ。数学上，参数 γ 在一定范围内可自由选择。然而，可以根据具体的实验条件对参数 γ 附加约束条件[11]。一旦确定了 γ 后，ChG 光束的模结构方

式则是唯一的。

Table 1　Numerical calculation results of analysis of mode structure of ChG beams

M^2	γ	M	C_{00} (%)	C_{02} C_{20} (%)	C_{22} (%)	C_{24} C_{42} (%)	C_{44} (%)	C_{46} C_{64} (%)	C_{66} (%)	C_{68} C_{86} (%)	C_{88} (%)	C_{810} C_{108} (%)
1.0	2.0	0	100									
1.5	0.2	0; 2; 4	84.3	−29.7	10.4	−3.2						
	1.6	0; 2; 4	73.4	43.9	26.3	2.8						
4.0	0.2	0; 2; 4; 8; 10	57.9	17.6	5.3	−9.2	15.8	−13.8	12.0	−8.3	5.7	−3.0
	1.6	0; 2; 4; 6; 8	6.9	17.7	45.3	41.4	37.9	18.5	9.1	2.6		

4　结　　论

我们推导出 ChG 光束的 M^2 因子和模相干系数的解析表达式, 从而可对 ChG 光束的模相关和模结构进行分析, 并提出了一种在实验室中利用偏心高斯光束产生 ShG 光束的简单方法。所得到的主要结论为: (1) ChG 光束的 M^2 因子公式为(5) 式, 它仅与其光束参数 $\delta = w_0^2 \Omega_0^2$ 有关, 且随 δ 的增加而增大; (2) 可将 ChG 光束表示为厄米-高斯模的叠加, 模相干系数为(17) 式和(18) 式, 它表明, 仅有偶数阶厄米-高斯模存在; (3) 基于(5) 式和(16)～(20) 式, 可对 ChG 光束进行模结构分析, 即由 M^2 因子可确定光束的模相关、模相干系数和相应的权重因子, 计算表明, 除基模高斯光束的极限情况外, ChG 光束的空间横模总是相关的; (4) 数学上, ChG 光束的模结构分析方式不是唯一的, 应当针对具体的实验条件, 选择适当的方法来确定自由参数 γ, 从而得到唯一的模结构方式; (5) 在实验室中, ChG 光束可由两束位相和光束宽度均相同的偏心高斯光束经相干合成而产生。最后, 应当指出的是, 我们仅以 ChG 光束为 HSG 光束的一个典型例, 研究其物理特性。文中所用方法和结论还可进一步用于研究更为一般的 HSG 光束的特性。

参　考　文　献

1　Siegman A E. Proc SPIE, 1990; 1224: 2～14
2　Weber H. Opt & Quant Electron, 1992; 24(9): 1027～1049
3　Du K M, Herziger G, Loosen P *et al*. Opt & Quant Electron, 1992; 24(9): 1081～1093
4　Du K M, Herziger G, Loosen P *et al*. Opt & Quant Electron, 1992; 24(9): 1119～1127
5　Casperson L W, Hall D G. J O S A, 1997; A14(12): 3341～3348
6　Casperson L W, Tovar A A. J O S A, 1998; A15(4): 954～961
7　Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1998; A15(9): 2425～2432
8　Erdelyi A, Magnus W, Oberhettunger F *et al*. Tables of Integral Transforms. New York: McGraw-Hill, 1954
9　Starikov A, Wolf E. J O S A, 1982; A72(7): 923～928
10　L　B D, Zhang B, Cai B W *et al*. Opt Commun, 1993; 101: 49～52
11　L　B D, Zhang B. J O S A, 1999; A16(10): 2453～2458

*　*　*

作者简介: 张　彬, 女, 1969 年 9 月出生。博士, 副教授。主要从事激光光束的传输变换的研究。

收稿日期: 2000-06-02