第 25 卷　第 5 期
2001 年 10 月
激　光　技　术
LASER TECHNOLOGY
Vol. 25, No. 5
October, 2001

快速汉克尔变换在光传输中的应用*

罗时荣　吕百达
(四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 在对各种快速汉克尔变换(FHT) 算法分析的基础上, 采用准离散汉克尔变换(QDHT) 来研究光束在含有空间滤波器的多程激光放大系统中的传输问题。数值计算例表明, 用快速汉克尔变换来模拟柱对称大型高功率激光放大系统中的光传输时, 是一种非常有用的、快速的算法。

关键词: 快速汉克尔变换　准离散汉克尔变换　光束传输　柱对称

Application of the fast Hankel transformation to the beam propagation

Luo Shirong, *L　Baida*
(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: On the basis of the analysis of various fast Hankel transformation(FHT) algorithms, the quasi-discrete Hankel transformation(QDHT) is chosen to study the beam propagation through multi-pass laser amplifier system containing a spatial filter. Numerical examples show that FHT is a useful fast algorithm to simulate the beam propagation through a large high power laser amplifier system with cylindrical symmetry.

Key words: fast Hankel transformation(FHT)　quasi-discrete Hankel transformation(QDHT)　beam propagation　cylindrical symmetry

引　　言

快速傅里叶变换(FFT) 因能节约大量的机时, 已被广泛用于研究大型光学系统中光的传输变换。但将 FFT 直接用于柱对称光学系统中(例如, 含有圆孔光阑的空间滤波器) 时会遇到困难。在旋转对称光学系统中的衍射积分可用汉克尔变换来描述, 类似于 FFT, 数学家和物理学家已发展了一些快速汉克尔变换(FHT) 的方法。目前, 主要的方法有: (1) 准快速汉克尔变换(QFHT)[1]。这种方法的核心是对汉克尔变换中的变量作非线性 Gardner 变换, 将汉克尔变换表示为二函数的互相关积分, 再利用 FFT 作计算。QFHT 不仅能提高计算速度, 也可节约大量内存, 但利用 QFHT 必须进行的低端校正不利于连续使用。(2) 投影法[2, 3]和Abel[4]变换法。这类方法的特点把汉克尔变换认为是二维函数在 x 方向投影的傅氏变换, 这样就可利用 FFT 作计算, 该方法因既不能节约机时, 也很复杂, 未被推广使用。(3) 二维快速汉克尔变换[5]。该方法的基本思想是将汉克尔变换表示为圆对称函数的二维傅氏变换, 并对入射分布进行半整数抽样, 使抽样矩阵的对称性得到提高, 利用该对称性, 使计算的点数大为减小。该方法可以满足二维输出数据的需要, 但对柱对称光学系统中的光传输问题的研究, 并不需要二维数据输出, 此时没必要用这样复杂的算法。从前面的讨论可知, 前面 3 类算法都是基于离散傅氏变换(DFT), 而 DFT 只是计算傅氏变换的一种巧妙算法, 在傅氏变换不存在的

* 国家高技术惯性约束聚变主题及国家八六三计划光束控制重点实验室基金资助项目。

地方, DFT 也存在, 因此, 在用 DFT 来处理物理问题时, 为了减小计算误差, 常需要人为地设立所谓的保护带。(4) 准离散汉克尔变换(QDHT)[6]。这种算法是计算汉克尔变换的一种有效的快速算法。我们将采用 QDHT 来研究高功率激光放大系统中的光传输问题, 并以数值计算来说明这种方法的应用。

1　准离散汉克尔变换方法概要

汉克尔变换和反汉克尔变换分别定义为[6]:

$$f_2(r_2) = 2\pi\int_0^{\infty} f_1(r_1)\,\mathrm{J}_0(2\pi r_1 r_2)\,r_1\mathrm{d}r_1 \tag{1}$$

$$f_1(r_1) = 2\pi\int_0^{\infty} f_2(r_2)\,\mathrm{J}_0(2\pi r_1 r_2)\,r_2\mathrm{d}r_2 \tag{2}$$

式中, J_0 是零阶贝塞尔函数。将(1)式和(2)式中的 $f_1(r_1)$ 和 $f_2(r_2)$ 展为零阶贝塞尔函数序列, 并定义新函数:

$$F_1(n) = f_1(j_n/2\pi R_2)\,|\mathrm{J}_1^{-1}(j_n)|\,R_1 \tag{3}$$

$$F_2(m) = f_2(j_m/2\pi R_1)\,|\mathrm{J}_1^{-1}(j_m)|\,R_2 \tag{4}$$

式中, $j_m/2\pi R_1 = r_2$, $j_n/2\pi R_2 = r_1$, j_m 和 j_n 都是零阶贝塞尔函数的正根, J_1 是一阶贝塞尔函数。当考虑到 $f_1(r_1)$ 和 $f_2(r_2)$ 分布在有限的范围(例如, 对应于在光学问题中有光阑限制情况), 即 $r_1 \leqslant R_1$, $r_2 \leqslant R_2$, (1)式和(2)式可简化为:

$$F_2(m) = \sum_{n=1}^{N} C_{mn} F_1(n) \tag{5}$$

$$F_1(n) = \sum_{n=1}^{N} C_{mn} F_2(m) \tag{6}$$

$$C_{mn}\ \frac{2}{S}\mathrm{J}_0\left(\frac{j_n j_m}{S}\right)|\mathrm{J}_1^{-1}(j_n)|\,|\mathrm{J}_1^{-1}(j_m)| \tag{7}$$

C_{mn} 是一个 $N\times N$ 矩阵 C 的矩阵元, $S = 2\pi R_1 R_2$。当 $S = j_{N+1}$, N 较大时, C^k(k 为偶数)可近似认为是一个单位矩阵, 且随着 N 的增加, C^k 与单位矩阵更加接近, 这在数学上意味着当 $S = j_{N+1}$ 且 N 较大时, 对一函数进行偶数次的 QDHT 可得到函数本身, 所以, 该计算方法是自洽的。此时有:

$$C_{mn} = \frac{2}{j_{N+1}}\mathrm{J}_0\left(\frac{j_n j_m}{S}\right)|\mathrm{J}_1^{-1}(j_n)|\,|\mathrm{J}_1^{-1}(j_m)| \tag{8}$$

2　用 **QDHT** 计算激光在高功率激光放大系统中的传输

初始场分布为 $E(r_0, z=0)$ 的光束通过用 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 矩阵表示的近轴光学系统的传输公式在柱坐标系下可表示为[7]:

$$E(r,z) = \frac{\mathrm{i}k}{B}\int_0^R E(r_0,0)\,\mathrm{J}_0\left(\frac{krr_0}{B}\right)\exp\left[\frac{-\mathrm{i}k(Ar_0^2 + Dr^2)}{2B}\right]r_0\mathrm{d}r_0 \tag{9}$$

式中, R 为光阑半径。为了利用 QDHT 方法进行计算, 应将(9)式变形为:

$$E(r,z) = 2\pi\int_0^R \frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\exp\left[\frac{-\mathrm{i}k(Ar_0^2 + Dr^2)}{2B}\right]E(r_0,0)\,\mathrm{J}_0\left(\frac{krr_0}{B}\right)r_0\mathrm{d}r_0 \tag{10}$$

比较(10)式和(1)式可知, 求解光束通过一 $ABCD$ 光学系统的场分布, 可通过将入射场 $E(r_0,0)$

乘上一因子 $i\exp[-ik(Ar_0^2+Dr^2)/2B]/\lambda B$ 后进行汉克尔变换,这样,我们就可利用QDHT 求解光束在光学系统中的传输。

在集中损耗近似下,脉冲激光放大器的能量密度和增益的递推公式为[7]:

$$J_{k+1}=TJ_s\ln\{G_k[\exp(J_k/J_s)-1]+1\} \tag{11}$$

$$G_{k+1}=G_k\exp(pJ_k/J_s)/\{1+G_k[\exp(J_k/J_s)-1]\}^p \tag{12}$$

式中,k 为激光在介质中传输的程数,p 为描述多程放大增益恢复程度的参数,称为恢复系数,J_k, J_{k+1}分别是第 k, $k+1$ 程的能量密度分布函数,J_s 是饱和能量密度,G_k, G_{k+1}分别是第 k 程和$k+1$程的小信号增益,$T=\exp(-\alpha L)$是集中损耗因子,α 是单程损耗系数,L 是介质长度,对于初始增益系数为 $g_0(x,y,z)$的介质,第 1 程小信号增益为:

$$G_1(x,y,L)=\exp[\int_0^L g_0(x,y,z)\mathrm{d}z] \tag{13}$$

光束在图 1 所示的含有一个空间滤波器的双程激光放大系统(该系统是激光聚变驱动器主放大系统中的一个典型的构型)中的传输,实际上包含了由(10)式所描述的光束在 $ABCD$ 系统(例如空间滤波器)中的衍射传输和由(11)式,(12)式所表示的激光在多程放大器中的放大。我们用 QDHT 法和梯形积分法分别编制了程序,并作了数值计算和比较,典型结果如图 2 所示。在入射光束和系统参数相同的情况下,两种方法所得结果是一致的,但 QDHT 法比梯形积分法快得多(例如用奔月 233M 对图 2a 实线所示的光强分布作计算,用 QDHT 只需 4s,而用梯形积分法所用的时间为 50s)。图 2 给出了束腰半径$w_0=1.5$cm 的 5 阶超高斯光束通过满足像传递条件的光学系统后,在输出面($l_3=4$m)上的光强分布。计算所使用的参数为:放大介质的长度$L=25$cm,饱和能量密度 $J_s=2.7$J/cm^2,损耗系数α= 0.5% cm^{-1},小信号增益系数$g_0=0.05$cm^{-1},恢复系数$p=0.5$。激光波长λ= 1.05μm,透镜焦距$f_1=f_2=f_3=4$m,$l_1=l_2=l_3=4$m,入射光阑半径为 2cm,滤波小孔半径分别是$R=2R_0$和$R=6R_0$(其中,$R_0=180$μm是空间滤波器的傅里叶变换面上光强分布的中心亮斑半径)。为了说明问题,图 2 中也给出了入射光强分布(如虚线所示)。

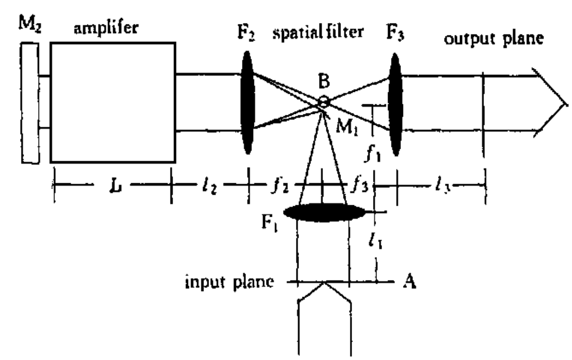

Fig. 1 Schematic illustration of a two-pass amplifier system
B—pinhole M$_1$, M$_2$—mirrors F$_1$, F$_2$, F$_3$—lenses A—aperture

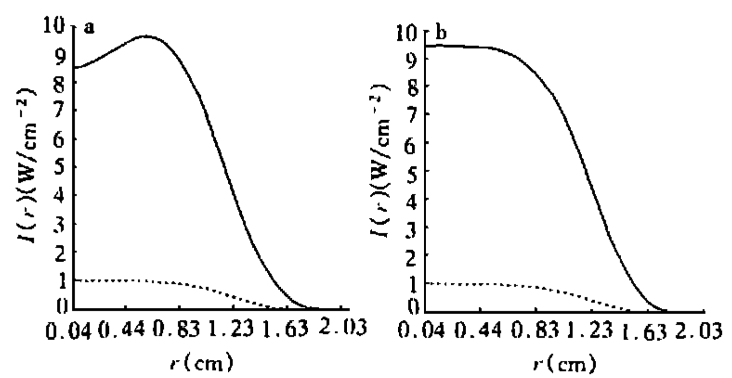

Fig. 2 The initial intensity distribution(……) of a super-Gaussian beam($N=5$) and output intensity distribution(——) in passage through a two pass amplifier system
a—$R=2R_0$ b—$R=6R_0$

分析图 2 可知, 对于满足像传递的系统, 输入脉冲形状一定时, 输出脉冲空间光强分布与放大器的增益分布和滤波小孔半径有关。对于增益均匀分布、小信号工作时, 输出脉冲的空间形状主要由滤波小孔大小确定, 放大器的作用只是使空间光强得到放大, 而空间滤波器的作用是在其傅氏变换面上, 用滤波小孔滤除入射光束中的高频分量, 当透镜焦距为 f 时, 半径为 R 的滤波小孔所对应的截止频率为 $\nu = 2\pi R/\lambda f$ [8], 图 2a、图 2b 中的空间截止频率 ν 分别为 $5.39\mathrm{cm}^{-1}$, $16.16\mathrm{cm}^{-1}$。比较图 2a、图 2b 可知, 激光在满足像传递条件、包含有空间滤波器的双程放大系统中传输, 当滤波小孔的半径较大(对应的空间截止频率较高) 时, 例如当 $R = 6R_0$, $\nu = 16.16\mathrm{cm}^{-1}$, 将保持空间形状不变(如图 2b 所示) , 而当滤波小孔的半径较小(对应的空间截止频率较低) 时, 激光在该系统中传输时, 将不能保持空间形状不变(如图 2a 所示) , 这是因为较小的滤波小孔所引起衍射的结果, 所以, 滤波小孔的合理选择在高功率激光放大系统设计中是十分重要的。

3　结　　论

汉克尔变换在物理学中广泛存在, 当离散点数目 N 较大、汉克尔变换和反汉克尔变换的截止半径 R_1, R_2 和 2π 的乘积等于零阶贝塞尔函数的第 $(N+1)$ 阶正零点时, 可用 QDHT 方法快速、精确地计算汉克尔变换, 并且在计算过程中不需要人为地设立保护带。虽然用 QDHT 方法计算汉克尔变换有快速、精确和方便的优点, 但也有其不足的方面, 如不能解决轴上点的汉克尔变换问题, 所幸的是物理上的量在局域上是连续的, 可通过对离轴最近的几个点的汉克尔变换值的分析得出轴上点的汉克尔变换值。我们以包括有空间滤波器的高功率激光多程放大系统为例, 首次将 QDHT 用于研究这类光学系统中的光传输问题, 得到了与传统算法一致的计算结果, 但比传统算法大大地节约了机时, 从而为这类柱对称大型强激光系统(例如, 采用圆孔光阑、圆形激光介质的惯性约束聚变激光驱动器等) 中的光传输提供了一种快速算法, 使之在微机上可以实现对柱对称激光驱动器的模拟, 现已用于这类系统的光传输计算, 具有重要的实际应用意义。

参　考　文　献

1　Siegman A E. Opt Lett, 1977; 1: 13~ 15
2　Oppenheim A V, Frisk G V, Martinez D R. Proc IEEE, 1978; 66: 264~ 265
3　Oppenheim A V, Frisk G V, Martinez D R. J A S A, 1980; 68: 523~ 529
4　Vest C M. J O S A, 1974; 64: 1215~ 1218
5　Patricia K, Murphy N, Gallaher C. J O S A, 1983; 73: 1130~ 1137
6　Li Y, Huang M C, Chen M Z *et al*. Opt Lett, 1998; 23: 409~ 411
7　吕百达. 强激光的传输与控制. 北京: 国防工业出版社, 1999: 23, 226
8　王桂英, 赵九源, 张明科 *et al*. 物理学报, 1985; 34(2) : 171~ 180

*　　*　　*

作者简介: 罗时荣, 女, 1966 年 5 月出生。副研究员, 博士研究生。现从事激光传输和激光光束质量描述的研究工作。

收稿日期: 2000-07-14　　收到修改稿日期: 2000-09-01