

Axilens 透镜的设计、加工和实验

赵 斌* 赵伟明 李荣彬

(* 华中理工大学机械学院仪器所, 武汉, 430074)

(香港理工大学 制造工程系, 香港, 306203)

摘要: 给出了一种用 Axilens 透镜产生线焦的方法。导出了 Axilens 透镜的面形微分方程及其近似解; 对 Axilens 的衍射特性进行了理论分析和数值计算; 分析了面形方程近似解的误差; 给出了面形方程的傅里叶级数表达式; 实验结果表明, 所设计及直接用 Taylor Hobson Nanoform 300 超精密车床制造的两个 Axilens 确实形成了所需的线焦。

关键词: Axilens 非球面透镜 超精密加工 衍射

Design, manufacture and experiment of Axilens

Zhao Bin*, Zhao Weimin, Li Rongbin

(* Institute of Instrumentation, School of Mechanical Science and Engineering, HUST, Wuhan, 430074)

(Hongkong Polytechnic University, Hongkong, 306203)

Abstract: In this paper, a methodology of producing a line focus by Axilens is presented. The surface differential equation of an Axilens is generated and its approximate solutions are derived. The diffraction properties of the Axilens are analyzed theoretically and numerically. The errors in the approximate solutions are analyzed. A Fourier series expansion of the solutions of the surface differential equation is given. Experiments are then performed on two Axilenses that are designed and manufactured by a Taylor Hobson Nanoform 300 Ultra-precision Lathe. The experimental results confirm that the desired line focus by Axilens can be achieved by the developed method.

Key words: Axilens aspherical lens ultra-precision machining diffraction

引 言

同时具有小的光焦点直径和大的焦深的光束在许多方面都很有用, 例如精密光学测量、光学加工、激光医疗器械等。传统的球面透镜系统是难以实现这一目标的, 因为从物理光学可知, 波阵面是球面的汇聚光束, 其焦深 dz 和光斑半径 ω 符合瑞利关系^[1]:

$$dz = 4\omega^2/\lambda \quad (1)$$

ω 减小就必然导致 dz 减小。近年来, 出现的无衍射光(nondiffracting beam)的研究^[2,3]在理论上解决了上述问题, 无衍射光的优点是其光斑形状不随传播距离而改变, 理论上焦深是无限的, 实际上焦深仅受限于透镜元件(例如 axicon)的孔径。但无衍射光却有一个能量过于分散的缺点, 中心光斑内能量所占比率太低, 不利于实际应用, 况且有时也不要求无限焦深。为克服此缺点, Davidson N^[1]提出了全息轴透镜(holographic Axilens), 理论上可以得到任意焦深长度的光束, 此后, Sochacki J^[4]又对全息轴透镜相位分布的计算方法进行了改进。

全息轴透镜尽管在理论上实现了任意焦深、高能量集中度的光束, 但由于全息透镜之衍射工作原理的限制, 其实际能量利用率及所形成的光斑质量都难以保证和提高。随着单点金剛

石超精密加工技术(single point diamond turning)的发展,现在已可以用超精密数控车床直接加工出具有光学质量的表面,从而可制造出任意面形的轴对称非球面透镜和反射镜,这就为光学元件的制造开辟了一条新路。我们报道了在 Axilens 透镜的设计理论和直接用单点金刚石超精密车床制造 Axilens 透镜等方面的工作。

1 Axilens 透镜的面形方程

我们考察如图 1 所示的平凸形式的 Axilens 透镜。

我们的目标是:焦深范围在 l_0 到 l_1 之间,即近轴

焦点为 l_0 ,孔径 R 处光线焦点为 l_1 ,且轴上点光强在该范围内均匀分布。

从几何光学的角度看,入射高度为 y 的光线经折射后与光轴交于 z 处,由于轴对称的缘故,该处的能量密度正比于 $2\pi y \cdot dy$,因此,若要焦线上光强分布均匀,则需:

$$2\pi y dy / dz = c \text{ 常数} \quad (2)$$

$$\text{积分后,代入边界条件可得: } z = l_0 + y^2(l_1 - l_0) / R^2 \quad (3)$$

这就是入射线高度 y 和折射后与光轴交点 z 的关系。

要实现(3)式,Axilens 的面形应该是怎样的呢?

设入射点为 $P(z_P, y_P)$,入射角、折射角为 i, i' ,折射率为 n ,折射线与光轴的夹角为 β ,则从图 1 可以得到以下几个关系:

$$n \sin i = \sin i' \quad (4)$$

$$i' - i = \beta \quad (5)$$

$$\text{将(5)式代入(4)式: } n \sin i = \sin i \cdot \cos \beta + \cos i \cdot \sin \beta \quad (6)$$

$$\text{整理得: } \tan i = \sin \beta / (n - \cos \beta) \quad (7)$$

另一方面,从图 1 可以看出 P 点切线与 y 轴的夹角就等于 P 点法线与入射线的夹角 i ,于是:

$$- dz_P / dy_P = \tan i = \sin \beta / (n - \cos \beta) \quad (8)$$

利用(3)式并根据图 1 的几何关系可得:

$$\begin{cases} \sin \beta = y_P / \sqrt{[-z_P + l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2]^2 + y_P^2} \\ \cos \beta = [-z_P + l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2] / \sqrt{[-z_P + l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2]^2 + y_P^2} \end{cases} \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式可得:

$$- \frac{dz_P}{dy_P} = \frac{y_P}{n \sqrt{[-z_P + l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2]^2 + y_P^2} - [-z_P + l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2]} \quad (10)$$

至此,我们得到一个描述 Axilens 透镜面形的准确的微分方程。

我们进一步作近轴近似简化就可以得方程(10)的近似解,为此令:

$$\begin{cases} \sin \beta \approx y_P / [l_0 + y_P^2(l_1 - l_0) / R^2] \\ \cos \beta \approx 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{直接代入(8)式得: } - \frac{dz_P}{dy_P} = \frac{y_P}{(n - 1)[l_0 + (l_1 - l_0)y_P^2 / R^2]} \quad (12)$$

解此微分方程,代入边界条件后得 Axilens 透镜面形方程的近似解:

$$z_P = -R^2 \ln[1 + (l_1 - l_0)y_P^2 / (l_0 R^2)] / [2(n - 1)(l_1 - l_0)] \quad (13)$$

(13)式用于小相对孔径元件的计算和制造及菲涅耳衍射积分计算是有效的。

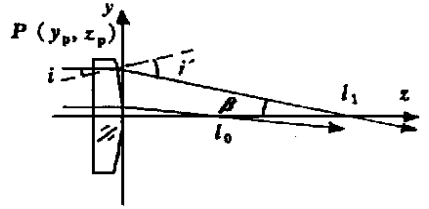


Fig. 1 Illustration of Axilens

2 Axilens 的衍射理论研究

当一平面波通过具有(13)式面形分布的透镜时,波阵面相对相位分布变为(注意 $z_P < 0$):

$$\Phi(x, y) = k(n-1)z_P \quad (14)$$

式中, $k = 2\pi/\lambda$ 经过距离为 z_1 的传播后,根据菲涅耳衍射积分计算公式,衍射场分布为:

$$E(z_1, x_1, y_1) = \frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1} \iint \exp\{ik(n-1)z_P + i\frac{k}{2z_1}[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]\} dx dy \quad (15)$$

由于轴对称性,可将上式转换到柱面坐标系中:

$$E(z_1, r_1) = \frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp\{ik(n-1)z_P + i\frac{k}{2z_1}[r_1^2 + r^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)]\} r dr d\varphi \quad (16)$$

将(13)式代入,并先对 φ 积分:

$$E(z_1, r_1) = \frac{\exp[ikz_1 + ikr_1^2/(2z_1)]}{i\lambda z_1} \int_0^R \exp\left\{-\frac{ikR^2}{2(l_1-l_0)} \ln\left[\frac{l_0 + (l_1-l_0)r^2/R^2}{l_0}\right] + i\frac{k}{2z_1}r^2\right\} \times 2\pi r J_0(krr_1/z_1) dr \quad (17)$$

我们可以利用稳相法^[3]来处理(17)式,计算 l_0 和 l_1 之间不靠近端点部分的轴上点的衍射光强。为此,先令: $f(r) = \frac{R^2}{2(l_1-l_0)} \ln\left[\frac{l_0 + (l_1-l_0)r^2/R^2}{l_0}\right] - \frac{r^2}{2z_1}$

$$f(r) = \frac{R^2}{2(l_1-l_0)} \ln\left[\frac{l_0 + (l_1-l_0)r^2/R^2}{l_0}\right] - \frac{r^2}{2z_1} \quad (18)$$

$$\text{为了求 } f(r) \text{ 的极值点,先对其求导数: } f' = \frac{R^2}{2(l_1-l_0)} \cdot \frac{2(l_1-l_0)r/R^2}{l_0 + (l_1-l_0)r^2/R^2} - \frac{r}{z_1} \quad (19)$$

$$\text{解 } f' = 0 \text{ 可得稳相点: } \begin{cases} r_{P_1} = 0 \\ r_{P_2} = R \sqrt{(z_1-l_0)/(l_1-l_0)} \end{cases} \quad (20)$$

根据稳相法,积分(17)式主要由 r_{P_1} 和 r_{P_2} 两点处的部分 E_1 和 E_2 构成,即:

$$E(z_1, r_1) \approx E_1 + E_2 \quad (21)$$

而 E_1 和 E_2 分别为:

$$E_1 = \frac{\exp[ikz_1 + ikr_1^2/(2z_1)]}{i\lambda z_1} \sqrt{\frac{\pi}{2f''(r_{P_1})}} 2\pi r_{P_1} J_0\left(\frac{kr_{P_1}r_1}{z_1}\right) \frac{\exp[-i\pi/4 - ikf(r_{P_1})]}{\sqrt{k}} = 0 \quad (22)$$

$$\text{及 } E_2 = \frac{\exp[ikz_1 + ikr_1^2/(2z_1)]}{i\lambda z_1} \sqrt{\frac{\pi}{2f''(r_{P_2})}} 2\pi r_{P_2} J_0\left(\frac{kr_{P_2}r_1}{z_1}\right) \frac{\exp[-i\pi/4 - ikf(r_{P_2})]}{\sqrt{k}} \quad (23)$$

$$\text{其中, } f''(r_{P_2}) = \frac{l_0 - (l_1-l_0)r_{P_2}^2/R^2}{[l_0 - (l_1-l_0)r_{P_2}^2/R^2]} - \frac{1}{z_1} = 2(l_0 - z_1)/z_1^2 \quad (24)$$

$$\text{代入(23)式可得: } E_2 = \frac{R}{\sqrt{\lambda(l_1-l_0)}} J_0\left(\frac{kr_1}{z_1} R \sqrt{\frac{l_1-l_0}{l_1-l_0}}\right) \exp\left[ikz_1 + \frac{ik}{2z_1} - \frac{i\pi}{4} - ikf(r_{P_2})\right] \quad (25)$$

由于光强度 I 正比于场强度 E 的平方,因此:

$$I(z_1, r_1) = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = \frac{R}{\lambda(l_1-l_0)} J_0^2\left(\frac{kr_1}{z_1} R \sqrt{\frac{l_1-l_0}{l_1-l_0}}\right) \quad (26)$$

此式可用以估计焦线上的光斑形状和直径。对于轴上点, $r_1 = 0$, 于是:

$$I(z_1, 0) \propto (R^2/[\lambda(l_1-l_0)]) \quad (27)$$

是一个与位置 z 无关的值,也就是说,在 $l_0 \sim l_1$ 的一段范围内,轴上点光强不变,这正是我们所需要的。

图 2 是衍射积分(17)式的轴上点数值计算结果,可见与稳相法的分析结果是基本相符的,从其形状可见,基本实现了一段距离的线焦,因此,可以认为, Axilens 的面形设计(13)式是基本正确的。

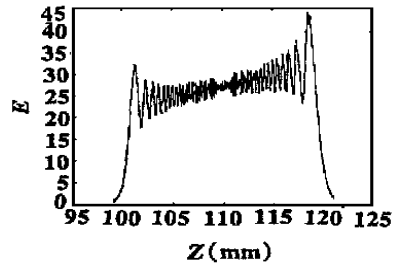


Fig. 2 Results of diffraction intensity along z axis

3 面形方程的级数形式解及直接超精密金刚石切削加工

第二节中我们得出了 Axilens 透镜面形的微分方程(10)式和其近似解(13)式。然而,当透镜的相对孔径较大时,(13)式就会引入较大误差,使得实际焦线范围不在 $l_0 \sim l_1$ 之间,因此,在理论上应对此有个估计。首先,该误差的大小可以这样求出:将(13)式代入(10)式左边,并令实际光线与光轴交于 l' ,将 l' 代入(10)式右边替换相应的部分:

$$\frac{y_P/l_0}{(n-1)\{1+[(l_1-l_0)y_P^2/(l_0R^2)]\}} = \frac{y_P^2}{n\sqrt{y_P^2+(-z_P+l_1)^2}-(-z_P+l')} \quad (28)$$

令 $y_P = R$ 并将 z_P 代入,可解出:

$$l'_1 = -\frac{R^2}{2(n-1)(l_1-l_0)} \ln(l_1/l_0) + \frac{(n-1)l_1 + n\sqrt{(n-1)^2l_1^2 - (n^2-1)R^2}}{n^2-1} \quad (29)$$

由此式可计算实际误差,亦可进一步作一阶泰勒多项式展开近似得:

$$l'_1 - l_1 \approx -R^2/[2(n-1)l_0] - nR^2/[2(n-1)l_1] \quad (30)$$

这就是用(13)式所导致误差的估计式。可见当焦线两端太接近镜面时,(13)式误差较大。

随着超精密金刚石切削技术的发展,现在已经可以用非脆性材料加工出具有光学质量的表面,从而为制造各种高精度非球面透镜和反射镜开辟了一条新路。因此,利用这一技术,完全可以制造出具有理想面形的 Axilens 透镜,为此,我们需要得到(10)式的精确解。

然而,一方面微分方程(10)式无法得到解析解,另一方面超精密加工机床的控制编程所需要的是以多项式形式表达的面形参数方程,如果我们令(10)式的解为一个级数,并考虑到其轴对称性,则级数中应只含 y_P 的偶次项。如果令: $y_P^2 = t$,则(10)式可以化为:

$$\frac{dz_P}{dt} = \frac{-1}{2\{n\sqrt{t+[-z_P+l_0+at]}^2 - [-z_P+l_0+at]\}} \quad (31)$$

式中, $a = (l_1 - l_0)/R^2$ 。

将 $z_P(t)$ 写作泰勒展开式:
$$z_P(t) = z_P(0) + z'_P(0)t + \frac{z''_P(0)}{2!}t^2 + \frac{z'''_P(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (32)$$

下面将求出各项的系数:

首先,由边界条件得:
$$z_P(0) = 0 \quad (33)$$

代入(31)式可得:
$$z'_P(0) = \left. \frac{dz_P}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2(n-1)l_0} \quad (34)$$

对(31)式两边求导数,并应用(33)式、(34)式可得:

$$z''_P(0) = \left. \frac{d^2z_P}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{n+1+2al(n-1)}{4l_0^3(n-1)^2} \quad (35)$$

按此法可依次求出 $z_P(t)$ 的各次导数, 具体推导可用软件 Mathematica 进行, 结果如下:

$$z_P^{[3]}(0) = - \{3(n^2 - 1)^2 + 8a^2 l_0^2[-4n(1 + n^2) + (1 + 6n^2 + n^4)] + 2al_0[n(9 - 13n^2) + (-5 + 3n^2 + 6n^4)]\} / [8l_0^5(n - 1)^5] \quad (34)$$

$$z_P^{[4]}(0) = - \{15(n^2 - 1)^3 - 48a^3 l_0^3[-2n(3 + 10n^2 + 3n^4) + (1 + 15n^2 + 14n^4 + n^6)] - 8a^2 l_0^2[n(47 - 50n^2 - 77n^4) + (-13 - 40n^2 + 115n^4 + 18n^6)] - 2al_0[-2n(31 - 74n^2 + 51n^4) + (35 - 57n^2 - 7n^4 + 45n^6)]\} / [16l_0^7(n - 1)^7] \quad (35)$$

$$z_P^{[5]}(0) = - \{105(n^2 - 1)^4 + 384a^4 l_0^4[-8n(1 + 7n^2 + 7n^4 + n^6) + (1 + 28n^2 + 70n^4 + 28n^6 + n^8)] + 16a^3 l_0^3[n(419 + 175n^2 - 2583n^4 - 763n^6) + (-77 - 777n^2 + 1505n^4 + 1981n^6 + 120n^8)] + 16a^2 l_0^2[-n(303 - 595n^2 + 105n^4 + 603n^6) + (85 + 168n^2 - 840n^4 + 868n^6 + 135n^8)] + 6al_0[n(185 - 625n^2 + 735n^4 - 327n^6) + (-105 + 277n^2 - 155n^4 - 125n^6 + 140n^8)]\} / [32l_0^9(n - 1)^9] \quad (36)$$

$$z_P^{[6]}(0) = - \{945(n^2 - 1)^5 - 3840a^5 l_0^5[-2n(5 + 60n^2 + 126n^4 + 60n^6 + 5n^8) + (1 + 45n^2 + 210n^4 + 210n^6 + 45n^8 + n^{10})] - 576a^4 l_0^4[n(211 + 636n^2 - 2646n^4 - 3156n^6 - 421n^8) + (-29 - 594n^2 + 546n^4 + 3864n^6 + 1539n^8 + 50n^{10})] - 16a^3 l_0^3[n(-8881 + 3668n^2 + 34538n^4 - 68236n^6 - 20865n^8) + 2(826 + 7363n^2 - 19460n^4 + 11998n^6 + 27568n^8 + 1575n^{10})] - 8a^2 l_0^2[n(8681 - 25844n^2 + 19110n^4 + 7532n^6 - 19335n^8) + 2(-1225 - 1116n^2 + 14350n^4 - 22288n^6 + 13107n^8 + 2100n^{10})] - 6al_0[-2n(1015 - 4441n^2 + 7445n^4 - 5771n^6 + 1880n^8) + (1155 - 4207n^2 + 4780n^4 - 400n^6 - 2647n^8 + 1575n^{10})]\} / [64l_0^{11}(n - 1)^{11}] \quad (37)$$

最终, 理想的 Axilens 的面形加工方程是:

$$z(y) = z'_P(0)y^2 + \frac{z''_P(0)}{2}y^4 + \frac{z^{[3]}_P(0)}{3!}y^6 + \frac{z^{[4]}_P(0)}{4!}y^8 + \frac{z^{[5]}_P(0)}{5!}y^{10} + \frac{z^{[6]}_P(0)}{6!}y^{12} \quad (38)$$

将设计参数 l_0 , l_1 和 R , n 代入, 就可以算出上式中各项的系数, 输入计算机直接进行加工了。

4 实 验

加工所用车床为 Taylor-Hobson Pneumo 公司生产的 Nanoform 300 超精密车床, 形状精度 $0.1\mu\text{m}$, 表面粗糙度 9nm 。实验中直接用 $1/3\text{in}$ 的面阵 CCD 探测器接受图 1 中 Axilens 所产生的光束, 得到各距离处光束横截面图像。

我们给出两组实验结果: 第一组元件的设计参数为 $R = 12\text{mm}$, $l_0 = 110\text{mm}$, $l_1 = 115\text{mm}$ 和 $n = 1.49$ (Acrylic), 用 (26) 式可估计其理论光斑半径约 $24\mu\text{m}$, 根据 (1) 式, 同样, 会聚角之球面波的瑞利焦深约 $36\mu\text{m}$; 第二组元件的设计参数为 $R = 12\text{mm}$, $l_0 = 1460\text{mm}$, $l_1 = 1560\text{mm}$ 和 $n = 1.49$ (Acrylic), 其理论光斑半径约 $30\mu\text{m}$, 根据 (1) 式, 其瑞利焦深约 5.7mm 。图 3 和图 4 分别记录了两个 Axilens 所产生的焦线从开始出现到逐渐消失的过程。图 3 中各曲线是从其

对应下方的 CCD 照片中经过光强度最大点的横截线, 纵坐标为相对光强(0~ 255), 横坐标为 CCD 像元, 对应光斑横向尺寸, 总长度为 $40 \times 6.4 \mu\text{m}$; 图 4 中横坐标长度为 $60 \times 6.4 \mu\text{m}$ 。

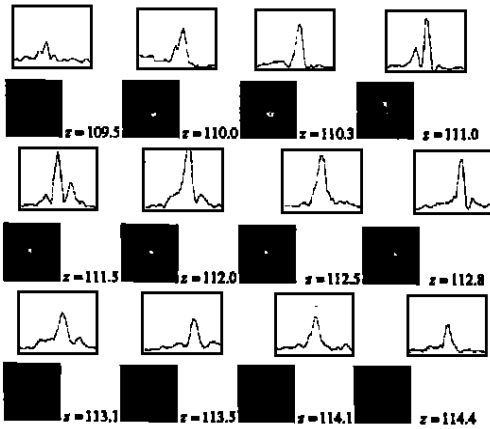


Fig. 3 ExPerimental results with Axilens 1

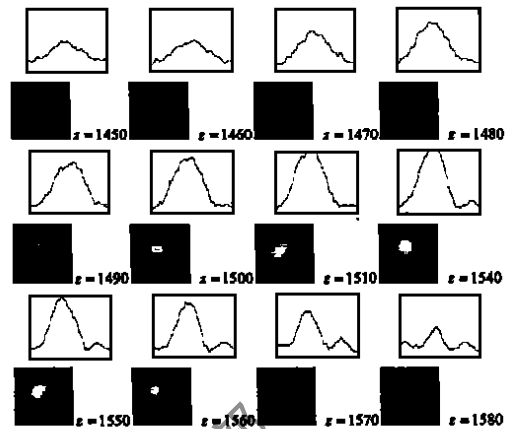


Fig. 4 ExPerimental results with Axilens 1

实验结果显示, 两个 Axilens 都产生了远大于瑞利焦深的焦线, 且光斑半径与理论预测值相当, 表明 Axilens 的设计是成功的。

需要说明的是, 光斑中心强度并未出现图 2 所预测的强烈起伏, 这是因为图 2 的计算是理想情况的, 而实际上存在着入射光强度的不均匀、材料不均匀、加工表面误差、透镜安装方向的误差等随机误差因素, 这些因素相干迭加的结果, 使得轴上点强度变化过程变得平滑了, 因此, 如何进一步提高 Axilens 的加工精度和质量是有待研究的问题。

5 展望和致谢

产生细长焦线的光学元件可望在许多领域得到应用, 除本文开头所提及的之外, 还可用于各种特殊要求的激光扫描系统和探测系统。由于超精密加工技术和精密模具技术的结合, 使得可以大批量注塑塑料透镜, 甚至大批量模压玻璃透镜, 因此, 各种非球面的特殊透镜, 例如笔者所述之 Axilens, 将可望获得一定的应用, 尽管如此进一步提高加工精度以获得高的光学质量仍是一重要课题。

我们的工作在香港理工大学制造工程超精密加工中心进行, 并得到该校项目“光学非球面元件的设计和制造”的资助。工作中得到杜雪小姐、钟大华先生的热情帮助, 作者在此深表谢意。

参 考 文 献

- 1 Davidson N, Friesem A A, Hasnan E. *Opt Lett*, 1991; 16(7): 523
- 2 Dumin J, Miceli J J, Eberly J H. *J O S A*, 1986; 3(13): 128
- 3 Herman R M, Wiggins T A. *J O S A*, 1986; 8(6): 932
- 4 Sochacki J, Bara S, Jaroszewicz Z *et al.* *Opt Lett*, 1992; 17(1): 7
- 5 Bom M, Wolf E. *Principles of Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 752

作者简介: 赵 斌, 男, 1963 年 1 月出生。副教授。现从事应用光学研究。