

相对论电子沟道辐射产生 FEL 的可行性分析

冯建辉 祝家清 刘圣广 姜孟瑞
(华中师范大学物理系, 武汉, 430079)

摘要: 采用连续介质模型, 研究了电子在晶片中的单粒子运动轨迹和稳定性条件。导出了晶片中相对论电子的自发辐射谱分布, 证实了晶片中相对论沟道电子产生相干辐射的可能性。

关键词: 沟道辐射 连续介质模型 库仑屏蔽势 自由电子激光

Analysis of feasibility of a FEL operation by radiation from relativistic electrons channeled in a crystal slab

Feng Jianhui, Zhu Jiaqing, Liu Shengguang, Jiang Mengrui
(Department of Physics, Central China Normal University, Wuhan, 430079)

Abstract: In this paper, we study the single-particle trajectories and stable condition of relativistic electrons in a crystal slab, using the continuum model proposed by Gemmell D. S. The angular spectrum of spontaneous emission from relativistic electrons in a crystal is derived, and the result shows that the coherent radiation from relativistic electrons channeled in a crystal is possible.

Key words: channel radiation continuum model screened Coulomb potential free-electron lasers

引 言

获取短波长自由电子激光是研究自由电子激光的重要课题之一。根据共振关系 $\lambda = \lambda_w (1 + 2a_w^2) / 2\gamma^{2[1]}$ 可知, 自由电子激光波长 λ 由泵浦场周期长度 λ_w , 泵浦场强度 a_w 以及电子束能量 γ 三个量确定。在泵浦场强度一定的条件下, 要获得短波长自由电子激光除了增加电子束的能量以外, 还需缩短泵浦场的周期长度。Smith-Purcell 用电子束掠过金属光栅时, 将辐射电磁波, 即使电子是匀速运动, 辐射仍然存在。利用这种效应发展了一类自由电子激光, 称为 Smith-Purcell 自由电子激光。另外, 采用短周期磁铁方案也是获得短波长自由电子激光的重要途径^[2~4]。还有的采用电流波动器的研究路线, 使波动器周期长度连续可调^[5]。这种方案虽然省去了铁材和铜材, 然而要实现区域性面电流密度却是技术上较困难的问题。

我们利用晶体固有的短周期点阵结构, 来实现电子短波长的摇摆辐射。早在 1979 年, Alguard M. J. 等就已对这种结构做过原理性实验报道, 观察到 56MeV ($\gamma = 111$) 正电子在 18 μm 厚的硅晶片主面之间和沿 $\langle 110 \rangle$ 轴向的沟道辐射, 并测得与理论预言相一致的平面沟道辐射能谱峰值^[6]。这里采用连续介质模型作为该结构的近似, 计算了它的库仑场。以此为基础, 利用哈密顿原理和 Madey 定理, 研究了电子在晶片中的运动轨迹和辐射谱。

1 物理模型

考虑到晶片中电子云对核的库仑场的屏蔽作用, 原子核在距核 r 处产生的库仑势应取

$$V(r) = Ae \exp(-r/a) / (4\pi\epsilon_0 r) \tag{1}$$

式中, A 为原子序数, e 为基本电荷量, ϵ_0 为真空中的介电常数, a 为原子半径。

假定高能电子沿晶轴方向射入晶片, 由于原子之间间隔很小, 再加上相对论理论中沿运动方向长度的收缩效应, 因此, 在电子的运动坐标系中观察, 在与电子运动方向平行原子面上, 离散分布的原子几乎排列成连续分布的原子面。鉴于上述原因, 这里用连续介质模型来计算单个原子面在空间各点的势分布(如图1所示)。

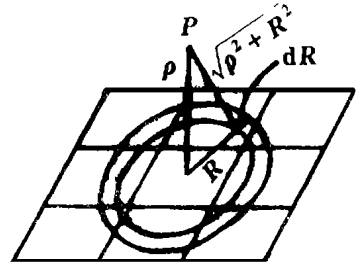


Fig. 1 The potential of point P

假定空间点 P 到原子面的间距为 ρ , 以点 P 在原子面上的投影为圆心, 取一内径为 R , 外径为 $R + dR$ 的连续介质环, 则整个原子面在 P 点产生的势为

$$V_0(\rho) = \sigma \int_0^\infty V(\sqrt{\rho^2 + R^2}) \cdot 2\pi R dR = \frac{\sigma A e a}{2\epsilon_0} \exp(-\rho/a) \tag{2}$$

式中, σ 为原子数面密度。

设各原子面之间间隔为 d , 空间点与相邻原子面间距为 ρ , 则 P 点与各原子面间距为 $|\rho + nd|$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (见图2)。所以, 整个晶片在空间点 P 处产生的电势为

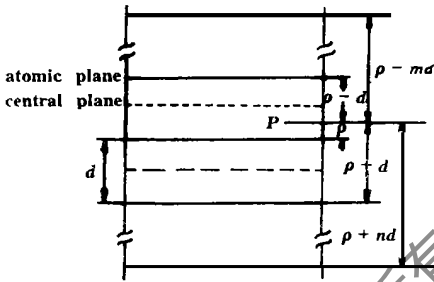


Fig. 2 The distance from point P to the plane of atoms

$$V_w(\rho) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} V_0(|\rho + nd|) \tag{3}$$

由于 $n \neq 0$ 的原子面距空间点 P 较远, 所以, 它们对点 P 处电势的贡献不大, 因而整个晶片中只须考虑与点 P 最近的原子面的作用, 可将(3)式中 $n \neq 0$ 的小量部分略去, 由此得到

$$V_w(\rho) \approx V_0(\rho) = \sigma A e a \exp(-\rho/a) / (2\epsilon_0) \tag{4}$$

进一步可由此求得电子在晶片中的势能分布为

$$V_w(\rho) = -eV_w(\rho) = -\sigma A e^2 a \exp(\rho/a) / (2\epsilon_0) \tag{5}$$

可见, 电子的势能只与它到相邻原子的间距有关, 而与它的纵向位移无关, 晶片中各原子核的共同作用使电子的势能呈横向梯度分布, 随着电子到原子面间距增大, 电子势能大小呈指数衰减, 直到进入另一原子面的有效作用范围。

2 运动电子的自发辐射

如果忽略空间电荷效应和辐射电磁场的影响, 并假定电子只在如图3所示的平面上作沟道运动, 在图中以电子纵向运动方向为 z 轴方向, 以电子横向摆动方向为 x 轴方向, 以晶片原子面入射端为原点建立直角坐标系 $o-xz$, 则电子运动的哈密顿量可以表示为

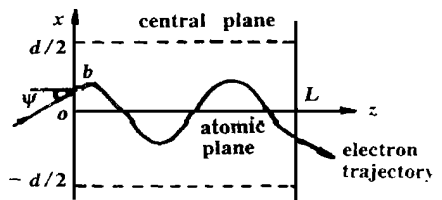


Fig. 3 The motion frame of the electron

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + P_x^2 + P_z^2} - \sigma A e^2 a \exp(-|x|/a) / (2\epsilon_0) \tag{6}$$

根据哈密顿原理, 经复杂计算可知, 穿过晶片中高速运动的自由电子确实有可能作横向摆动式沟道运动, 最大摆幅为 d_p 。然而, 如果电子摆幅 $d_p > d/2$, 就会使电子偏离与它相邻的原子面, 并进入另一原子面的有效作用范围, 从而使电子的轨道发生改变。因此, 电子在一个原

子面附近作稳定的振荡运动必须保证满足稳定性条件, 即 $d_p < d/2$ (7)

而电子作沟道运动的稳定性条件为

$$\Psi < \Psi_c = \frac{1}{V_{11}} \left[\frac{c^0 A e^2 a}{\epsilon_0 \sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}} \right]^{1/2} \sqrt{\exp(-b/a) - \exp(-d/2a)} \quad (8)$$

如果取 $V_{11} \approx c$, 将 c, e^2, ϵ_0 的值代入 (21) 式, 并取 $\sigma \sim 10^{20} \text{m}^{-2}$, $a \sim 10^{-10} \text{m}$, 可得 Ψ_c 的数量级大致为

$$\Psi_c \sim \sqrt{1/\gamma_0} \exp[-b/(2a)] \quad (9)$$

可见, 电子沟道运动的稳定性条件由电子的瞄准距离和初始能量决定。如果电子的初始能量越高, 瞄准距离越大, 则对电子入射角的要求越高。

设辐射电磁波的电场 x 分量为 $\vec{E}_{sx} = \vec{e}_x E_s \cos(-k_{sz} + \omega_s t + \varphi)$ (10)

式中, E_s 为电场幅值, k_s 和 ω_s 分别为辐射波的波矢和圆频率, φ 为电磁波的初相位。

根据能量守恒方程 $d\gamma_1/dt = -e\vec{E}_s \cdot \vec{v}/m_c^2 = -eE_{sx}v_x/mc^2$ (11)

式中, γ_1 为电子能量的一阶扰动量, 积分上式, 可得 $\gamma_1 = -\frac{e}{mc^2} \int_0^\tau E_{sx} v_x dt$ (12)

式中, τ 为电子穿过晶片所用时间。

因为电子横向运动轨迹为周期函数, 且满足 Dirichlet 收敛条件, 故可用傅里叶级数将其写

出, 为 $X = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T})$ (13)

式中, $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt, n = 0, 1, 2, \dots$ (14a)

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt, n = 1, 2, 3, \dots$ (14b)

进一步可得 $v_x \equiv \dot{x}(t) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos \frac{2n\pi t}{T} - na_n \sin \frac{2n\pi t}{T})$ (15)

再将 (10) 式和 (15) 式代入 (12) 式, 得

$$\gamma_1 = -\frac{eE_s}{mc^2} \frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^\tau \cos(\omega_s t - k_{sz} + \varphi) (b_n \cos \frac{2n\pi t}{T} - a_n \sin \frac{2n\pi t}{T}) dt \quad (16)$$

考虑到电子的纵向运动, 有 $\omega_s t - k_{sz} = \omega_s(l - \beta_{||})t = \omega_s \omega_0 t / \omega_r$ (17)

式中, ω_0 定义为 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为电子运动频率, ω_r 表示电磁波基波谐振频率, 容易求出两者关系^[7] 满足: $\omega_r = \omega_0 / (l - \beta_{||} \cos\theta)$ (18)

令 $\theta = 0$, 即得 (17) 式右边两式的关系。如果令 $\omega_s = l\omega_r + \delta\omega$ ($\delta\omega$ 为失谐量), 将 (17) 式和 $\omega_0 = 2\pi/T$ 代入 (16) 式, 解得

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -\frac{eE_s \omega_0}{2mc^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^\tau \{ b_n [\cos((l+n+\delta\omega/\omega_r)\omega_0 t + \varphi) + \cos((l-n+\delta\omega/\omega_r)\omega_0 t + \varphi)] \\ & + a_n [\sin((l+n+\delta\omega/\omega_r)\omega_0 t + \varphi) + \sin((l-n+\delta\omega/\omega_r)\omega_0 t + \varphi)] \} dt \quad (19) \end{aligned}$$

显然, 如果 $\tau \gg T$, 那么只有在 $l \pm n = 0$ 且 $\delta\omega/\omega_r \ll 1$ 时, 上面积分才不为零。如令 $\tau \approx KT$,

则可求得 $\gamma_1 = -\frac{eE_s \omega_0 k l t}{2mc^2} \frac{\sin(K\delta\omega\omega_0 T/\omega_r)}{K\delta\omega\omega_0 T/\omega_r} \cdot |b_1 \cos \varphi - a_1 \sin \varphi|$ (20)

平方 γ_1 后, 再对相位 φ 求平均, 可得

$$\langle \gamma_1^2 \rangle = (a_1^2 + b_1^2) / 2 \cdot [\pi e E_s / (mc^2)]^2 \sin^2 U / U^2 \quad (21)$$

式中, $U = K\delta\omega\omega_0 T/\omega_r = 2K\pi\delta\omega/\omega_r$ 。

再根据 Madey 定理, 有

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{m^2 c \omega_s^2}{8\pi^2 \epsilon_0 E_s^2} \langle v_1^2 \rangle = \frac{\pi^2 l^2 (a_1^2 + b_1^2)}{2} \cdot \frac{e^2 \omega_s^2 K^2}{8 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\sin^2 U}{U^2} \quad (22)$$

结果表明, 自发辐射谱分布中有一重要的线型函数, 它与自由电子激光增益的计算有重要联系。这个因子把自由电子的受激辐射与自发辐射联系起来, 说明利用晶片中相对论电子沟道辐射产生自由电子激光是可能的。

3 结果讨论

前面用连续介质模型研究了晶片中相对论电子的沟道运动轨迹、稳定性条件和自发辐射谱分布, 证实了利用沟道效益产生自由电子激光的可行性。根据分析, 可以得到一些结论:

(1) 晶片中相对论电子的运动轨迹由电子的入射条件决定。对于一定能量的电子, 在瞄准距离一定的条件下, 如果其入射角大于一定角度, 电子的运动轨迹就会发生畸变。这个角度与电子的初始能量和瞄准距离有关, 随着能量和瞄准距离的增大, 对电子入射角的要求也越高, 产生自由电子激光的难度也会相应增大。

(2) 在自由电子的自发辐射谱中含有因子 $(a_1^2 + b_1^2)$, 它由电子的初始状态决定, 因此, 谱分布取决于电子的入射条件。

(3) 各次谐波的线型和线宽都是相同的, 相对线宽均为 $1/2K\pi$, 随着晶片厚度的变化, 电子运动的周期数 K 也发生变化, 因而相对线宽发生相应的变化。

(4) 从 (15) 式和 (16) 式可以看出, 电子摆动的周期由原子面密度决定, 由于晶片本身固有的短周期特点, 所以, 这种辐射很容易达到短波长。同时, 晶片取材天然, 没有材料加工上的困难, 因此, 我们对自发辐射的分析, 必将为进一步研究自由电子激光的机制提供一种新线索。

(5) 我们所讨论的晶片均是纯净的单晶体薄片, 其中不存在原子缺陷和杂质原子, 这些原子缺陷或杂质在实际情况中或多或少总有存在, 它们会对电子的运动产生影响。而且作者在讨论中也忽略了二次电子发射, 电子衍射等多种物理效应, 所有这些情况尚待进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Billardon M, Elleaume P, Ortega J M *et al.* IEEE J Q E, 1985; QE21: 805
- 2 Batchelor K, Ben-Zvi I, Fernow R *et al.* Nucl Instrum & Methods in Phys Res, 1990; A296: 239
- 3 Paulson P K. Nucl Instrum & Methods in Phys Res, 1990; A296: 624
- 4 祝家清, 刘延申, 冯建辉 *et al.* 激光杂志, 1995; 16: 224
- 5 祝家清, 甘仲惟, 余南山 *et al.* 激光技术, 1995; 19: 91
- 6 Alguard M J, Swent R L, Pantell R H *et al.* Phys Rev Lett, 1979; 42: 1148
- 7 祝家清. 自由电子激光引论. 武汉: 湖北教育出版社, 1994: 256

作者简介: 冯建辉, 男, 1972年12月出生。硕士。现在湖南长沙铁道学院数力系从事教学和自由电子激光的研究工作。

收稿日期: 1998-10-05 收到修改稿日期: 1999-01-04