第 23 卷 第 3 期　　激　光　技　术　　Vol. 23, No. 3
1999 年 6 月　　LASER TECHNOLOGY　　June, 1999

会聚球面波照明下由菲涅耳衍射实现分数傅里叶变换

沈学举　汪岳峰　任宏岩
(军械工程学院光学教研室, 石家庄, 050003)

摘要: 提出了在会聚球面波照明下,用菲涅耳衍射实现分数傅里叶变换的光学装置。定量得出了为实现分数傅里叶变换系统结构参数应满足的条件。分析表明,利用该系统可实现任意阶分数傅里叶变换。
关键词: 会聚球面波　分数阶傅里叶变换

Fractional Fourier transformation implemented by Fresnel diffraction with converging spherical wave illumination

Shen Xueju, Wang Yuefeng, Ren Hongyan
(College of Ordance Engineering, Shijiazhuang, 050003)

Abstract: This paper introduced an optical setup to perform fractional Fourier transformation by Fresnel diffraction with a converging spherical wave illumination. In order to realize the arbitrary order fractional Fourier transformation, the diffraction distance q, the locations of point light source and lenses must satisfy the conditions, formulated by this paper.
Key words: converging spherical wave　fractional Fourier transform

引　　言

1980 年由 Namias 提出分数傅里叶变换的数学概念[1]后, McBride 和 Kerr 进一步完善成完整的数学理论[2]。1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas 把分数傅里叶变换应用于光学领域, 建立了分数傅里叶变换的光学定义[3]。Lohmann 又用 Wigner 分布函数在光学上定义分数傅里叶变换, 并提出了用透镜实现分数傅里叶变换的两种基本装置[4]。之后, 大量文章[5~12]对分数傅里叶变换的光学实现及应用进行研究, 表明分数傅里叶变换在光学领域有潜在的广泛应用, 特别是在光学信息处理方面[13~15]。我们对会聚球面波照明下利用菲涅耳衍射实现分数傅里叶变换的光学装置进行了定量分析, 表明这是一种简单的实现分数傅里叶变换的光学装置。

1　会聚球面波照明下用菲涅耳衍射实现分数傅里叶变换

1.1　分数傅里叶变换的定义

点光源照明下, Lohmann 给出的分数傅里叶变换的定义为[16]:

$$u(x,y)=F^p\{u(x_0,y_0)\}=\iint_{-\infty}^{+\infty}u(x_0,y_0)\exp\{ik[(x^2+x_0^2)+(y^2+y_0^2)]/(2f_e\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi)\}$$
$$\exp\{[-ik(xx_0+yy_0)]/(f_e\sin^2\varphi)\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \qquad (1)$$

式中, f_e 是标准焦距, p 是变换结束阶数, $\varphi=\pi p/2$, $u(x_0,y_0)$ 是要变换的物体, $u_p(x,y)$ 是它的分数傅里叶变换。文献[17]给出了单色平面波照明下由菲涅耳衍射观察分数傅里叶变换

装置，如图 1 所示。令 $x_0 = x_{0e}\cos\varphi$ 或 $x_1 = x_{1e}/\cos\varphi$，则在接收平面上可分别得到物分布缩小 $\cos\varphi$ 倍后的分数傅里叶变换强度表达式或物分布分数傅里叶变换强度分布放大 $\cos\varphi$ 倍后的图案。

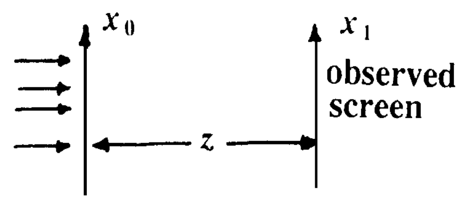

Fig. 1　Observation of fractional Fourier transform by diffraction through the free space

1.2　会聚球面波照明下用菲涅耳衍射实现分数傅里叶变换的光学装置

如图 1 所示，将点光源发出的球面波经透镜变换成会聚球面波，照明被变换物体。在物体后距离 q 处接收物体的衍射光波。接收面（x-y 面）和物平面（x_0-y_0 面）光场复振幅分布之间的关系为：

$$u(x,y) = \frac{-A_0}{\lambda^2 q d_0}\iint_{-\infty}^{+\infty}\iint_{-\infty}^{+\infty} u(x_0,y_0)\exp\left[ik\frac{(x_1^2+y_1^2)}{2l}\right]\exp\left[-ik\frac{(x_1^2+y_1^2)}{2f}\right]$$

$$\times\exp\left[ik\frac{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}{2d_0}\right]\exp\left[ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2q}\right]dx_1dy_1dx_0dy_0$$

$$= c\iint_{-\infty}^{+\infty} u(x_0,y_0)\exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{q}-\frac{1}{d_0^2 w}\right)(x_0^2+y_0^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{q}(x^2+y^2)-\frac{2}{q}(xx_0+yy_0)\right]\right\}dx_0dy_0 \tag{2}$$

式中，$w = 1/l + 1/d_0 - 1/f$，l 为点光源到透镜的距离，d_0 为透镜到物平面的距离，f 为透镜的焦距。　　令：

$$q = f_e\sin^2\varphi \tag{3}$$

$$1/d_0 + 1/q - 1/(d_0^2 w) = 1/(f_e\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi) \tag{4}$$

得：

$$1/l = 1/f - 1/(d_0 + 2f_e\cos^2\varphi) \tag{5}$$

衍射场强度分布为：

$$I = |u(x,y)|^2 = \left|\iint_{-\infty}^{+\infty} u(x_0,y_0)\exp\left\{\frac{ik}{2f_e\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi}[(x^2+y^2)+(x_0^2+y_0^2)]\right\}\right.$$

$$\left.\times\exp\left[\frac{ik}{f_e\sin^2\varphi}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0\right|^2 \tag{6}$$

（6）式中忽略了常数因子和附加相位因子。按照 Lohmann 的定义，（6）式是物分布 $u(x_0, y_0)$ 的分数阶傅里叶变换的强度表达式。只要调整光源和透镜的位置，使 q 满足（3）式，l，d_0 满足（5）式，则用图 2 所示的系统可在物平面和衍射面间实现 p 阶分数阶傅里叶变换。

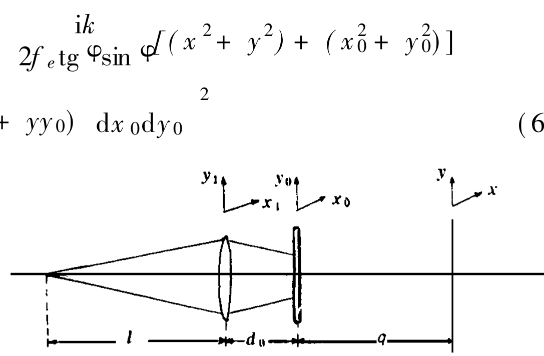

Fig. 2　Configuration of performing fractional Fourier transform

2　结　　论

（1）通过理论分析，提出了一种在会聚球面波照明下利用菲涅耳衍射实现任意阶分数傅里叶变换的光学装置。只要选择衍射距离 q 满足（3）式，在（5）式条件限制下调节点光源和透镜位置获得合适的会聚球面波可使物平面和衍射平面光场分布间实现任意阶分数傅里叶变换。

(2) 如果像文献[17]中令 $x_0 = x_{0e}\cos\varphi$, $y_0 = y_{0e}\cos\varphi$ 代入(2)式中, 此时, 令

$$q/(\cos\varphi) = f_e\sin^2\varphi \tag{7}$$

$$[1/d_0 + 1/q - 1/(d_0^2 w)]\cos^2\varphi = 1/(f_e\sin\varphi\mathrm{tg}\,\varphi) \tag{8}$$

得:

$$l = f \tag{9}$$

令 $x = x_e/\cos\varphi$, $y = y_e/\cos\varphi$, 代入(2)式中, 此时, 再令:

$$q\cos\varphi = f_e\sin^2\varphi \tag{10}$$

$$1/d_0 + 1/q - 1/(d_0^2 w) = 1/(f_e\sin\varphi\mathrm{tg}\,\varphi) \tag{11}$$

由(10)式、(11)式同样可得(9)式, 即点光源必须放在透镜的前焦点上, 在单色平面波垂直入射照明下, 才能实现文献[17]中的变换。

参 考 文 献

1 Namias V. J Inst Maths Appl, 1980; 25: 241~ 265

2 McBride A C, Kerr F H. IMA J Appl Math, 1987; 39: 159~ 175

3 Mendlovic D, Ozaktas H M. J O S A A, 1993; 10: 1875~ 1880

4 Lohmann A W. J O S A A, 1993; 10: 2181~ 2186

5 Ozaktas H M, Mendlovic D. Opt Commun, 1993; 101: 163~ 169

6 Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A A, 1993; 10: 2522~ 2531

7 Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Opt Commun, 1994; 105: 36~ 38

8 Mendlovic D, Bitran Y, Ferrieira C *et al*. Appl Opt, 1995; 34: 7451~ 7456

9 Mendlovic D, Zalevsky Z, Konforti N. Appl Opt, 1995; 34: 7615

10 Bernardo L M, Soares O D. Appl Opt, 1996; 35: 3163~ 3166

11 Mendlovic D, Zalevsky Z, Lohmann A W *et al*. Opt Commun, 1996; 126: 14~ 18

12 Erden M F, Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A A, 1996; 13: 1068

13 Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D *et al*. J O S A A, 1994; 11: 547~ 559

14 Granieri S, Trabochi O, Sicre E E. Opt Commun, 1995; 119: 275~ 278

15 Lohmann A W, Mendlovic D, Zalevsky Z *et al*. Opt Commun, 1996; 125: 18~ 20

16 Bernardo L M, Soares O D. J O S A A, 1994; 11: 2622~ 2626

17 华建文. 中国激光, 1997; 24: 435

* * *

作者简介: 沈学举, 男, 1963年出生。硕士, 讲师。主要从事军用激光技术的教学和科研工作。

收稿日期: 1998-01-21 收到修改稿日期: 1998-11-16