

莫尔层析术的模型误差分析及实验研究

姚 卫 尤海航 王振东 贺安之

(南京理工大学应用物理系, 南京, 210094)

摘要: 分析了经典莫尔层析法的误差模型, 通过讨论误差产生的机理, 研究了目前使用的重建算法的适用范围。用莫尔偏折仪层析重建的实验结果与真实温度值比对, 验证了误差模型的正确性。提出存在问题的本质及解决问题的方案——用相位展开法恢复有折射率场变形的波面, 提取波面变形量, 作为投影数据, 重建相应层面的折射率场。

关键词: 莫尔层析 重建 三维温度场

Analysis and experimental research of Moire tomography error model

Yao Wei, You Haihang, Wang Zhengdong, He Anzhi

(Dept. of Applied Physics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing, 210094)

Abstract: The error model of classical Moire tomography is analyzed. The applicable range of current reconstruction method is limited through analyzing causes of the error. Reconstruction results of experimental temperature fields using classical Moire tomography are compared with real measured values to verify the error model. The key problem existing in conventional Moire tomography is analyzed and a method of wavefront retrieving based on phase unwrapping is presented.

Key words: Moire tomography reconstruction three-dimensional temperature field

引 言

利用莫尔条纹进行相位物体层析的技术, 已有大量的文献报道^[1]。相应与莫尔层析术的算法如积分变换、代数迭代(ART)及其他改进的迭代算法也层出不穷^[2,3]。事实表明, 莫尔偏折法对相位折射率场的显示和重建是一种抗干扰能力强, 应用范围广, 极具吸引力的方法。莫尔偏折术的出发点是基于光线通过相位物体发生偏转, 使莫尔条纹变形来反映折射率场的折射率梯度。莫尔条纹的偏移反映了光线经折射率场的偏转角, 进而可推知光线的程差。这就为莫尔条纹应用于层析技术提供了依据。层析术的概念就是将三维折射率场分成一组平行截面, 利用折射率场沿光线方向的投影数据即光程差来再现场的三维折射率分布。莫尔层析术首先进行了一个假设: 即平行光线经弱折射场仅发生面内偏转。这一假设是进行经典的平面层析的基础, 也就是说在这一假设下我们才能认为由跟踪莫尔条纹重建的折射率场是一个平面温度场。我们在分析经典莫尔层析术的计算模型的基础上, 讨论了该模型的误差量级, 并提出了修正经典层析算法的观点和思想。作者用莫尔层析法再现了酒精灯起燃和模拟膛口的温度场, 与热电偶测量值及干涉层析结果作了比对, 验证了修正莫尔算法的必要性。文章的最后, 作者提出基于相位展开的变形波面恢复法, 解决条纹跟踪法产生的层面误差, 并给出了相应的结果。

一、理论分析

首先, 我们有必要分析一下莫尔条纹的性质:

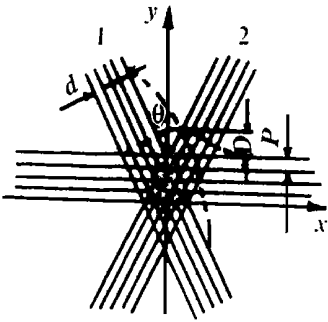


Fig. 1 Generation of Moire fringe

如图 1 示, 1, 2 表示夹角为 θ , 间距为 Δ 的两块 Ronchi 光栅, 光栅常数均为 d , 莫尔条纹间距为 P 。设光线经被测场在 x 方向的偏折 $\varphi_x(x, y)$, 接收面 Σ 上的莫尔条纹沿 y 轴的偏移量为:

$$D(x, y) = \frac{\varphi_x(x, y) \Delta}{2 \text{tg}(\theta/2)} \quad (1)$$

可见, 莫尔条纹把光线沿 x 轴方向的偏折, 以 y 轴方向的条纹漂移反映出来。所以用 $D(x, y)$ 可以求出入射光的内偏转角 $\varphi_x(x, y)$ 。

$$\varphi_x(x, y) = \frac{2D(x, y) \text{tg}(\theta/2)}{\Delta} \approx \frac{D \cdot \theta}{\Delta} = \frac{D \cdot d}{\Delta \cdot P} \quad (2)$$

然而, 在实际的折射率场中, 光线必定产生沿 z 轴方向的偏转。可以估计这一偏转角为 $\varepsilon \cdot \varphi$, 其中 ε 是描述折射率场沿 z 轴方向变化梯度的量。由 φ 引起的条纹位移量:

$$D' \approx \Delta \cdot \text{tg} \varepsilon \varphi / 2 \approx \Delta \cdot \varepsilon \varphi / 2 \quad (3)$$

这样, 我们测得的条纹位移量: $D_m = D + D' = \Delta \cdot \varphi \cdot (\varepsilon/2 + 1/\theta)$ (4)

用 D_m 估算面内偏转角 φ 时得到: $\varphi_m \approx (\varepsilon/2 + 1) \varphi$ (5)

莫尔层析的思想基础同干涉层析一样是投影定理。设 $m(P, \theta)$ 是条纹位移量, 如图 2 所示, 它是 $\Delta n(r, \varphi) = n(r, \varphi) - n_0$ 。沿光线 $P = r \sin(\varphi - \theta)$ 的积分:

$$m(P, \theta) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{+\infty}^{\infty} \Delta n(r, \varphi) \cdot \delta[P - r \sin(\varphi - \theta)] dx dy = \frac{1}{\lambda} \int_{+\infty}^{\infty} \Delta n(x, y) dS \quad (6)$$

λ 为波长, δ 为狄拉克函数, P 为待测点, S 为光线轨迹。在干涉层析中, 将光线 S 认为是直线 $S = x \cos \theta + y \sin \theta$, 这是莫尔层析与之不同的地方。所以,

研究莫尔层析我们首先必须将投影的概念推广到沿曲线的投影。为了利用层析的计算公式, 还要将莫尔图得到的光线偏转角转化为光程差。我们以轴对称场为例讨论这一转换过程。设折射率场为 $n(r)$, 由拉格朗日方程 $d/dS (n dS/dS) = \dot{n}$, 并假设光线沿 x 轴入射, 则面内偏转角为:

$$\varphi_x \approx \text{tg} \varphi_x = \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial y} dx \quad (7)$$

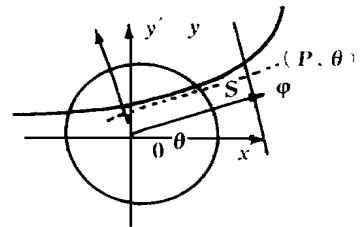


Fig. 2 Deflection of light when Passing through a index field

这一步的近似条件面内无限小连续偏转, 认为拉氏微分方程组中 $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0$ 。在转换的关键

一步:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_S \Delta n(x, y) dS = \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{\partial}{\partial y} \Delta n(x, y) dx = n \cdot \varphi_x \approx n_0 \cdot \varphi_x \quad (8)$$

中, 我们实际上又作了光线沿 x 轴传播的近似, 因为只有这样近似才有根据将偏导与积分交换次序, 否则, $S = S(x, y)$, 交换不成立。到此, 我们得到:

$$\Phi(x, y) = \int_{\xi}^{\xi_1} n_0 \cdot \varphi_x(x, y) dy \quad (9)$$

而我们的测量结果: $\Phi_m(x, y) = \Phi(x, y) / \eta$ (10)

η 是反映光线偏折的系数, 如图 3 所示, 记: $\eta \approx AO/OX \approx 1 + (\varepsilon^2 \varphi_x^2 / 2)$ (11)

反演 Radon 变换, 在轴对称场中:

$$\Delta n(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{3R_{\max}} \frac{\Phi(r-x) + \Phi(r+x) - 2\Phi(r)}{x^2} dx - \frac{2\Phi(r)}{3R_{\max}} \quad (12)$$

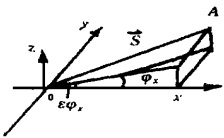


Fig. 3 Error caused when OA is substituted by OX

$\Delta n(r)$ 是光线入射平面的折射率差。但用测得的 Φ_m 代入计算得到的是：

$$\Delta n_m(r) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{\eta'} \cdot 1 + \frac{\theta}{2} \Delta n(r) \quad (13)$$

η' 是由于反演式沿 x 方向反投影带来的误差系数。为简化起见, 由于 η, η' 由同一因素引起, 认为他们有相同的数量级, $\eta' = \eta = 1 + (\varepsilon^2 \varphi_x^2 / 2)$, 故重建场 $\Delta n_m(r)$ 与实际入射面场 $\Delta n(r)$ 的关系是：

$$\Delta n_m(r) \approx \frac{1 + \theta}{1 + \varepsilon^2 \varphi_x^2} \Delta n(r) \quad (14)$$

三个系数 η, η', ε 分别表示了三次引入误差的原因, 因此, 我们可以分析莫尔层析法的上述数学模型的适用范围。决定误差的两个参数 ε 和 θ 中, θ 是两光栅的夹角, 为保证条纹在漂移过程中既不断裂缺失又不漂出视场, θ 通常在 $0.1 \sim 0.01 \text{rad}$ 范围内, 是系统的常数。而 $\varepsilon = \varepsilon(\Delta n)$ 是场的函数。很容易看出, 在轴对称场中, 轴向折射率梯度与径向折射率梯度在同一数量级时, 误差是可以允许的。然而, 对瞬态测试中经常处理的爆炸、爆燃、激波等轴向折射率梯度可能远大于径向的情况, $\varepsilon = \varphi_z / \varphi_r \gg 1$, 忽略光线的空间特性将是不能允许的。

二、实验及结果分析

为验证上述推导, 我们用莫尔偏折仪记录了酒精灯点火瞬间和模拟膛口射流温度场的莫尔偏折图, 如图 4, 图 5, 双光栅为 20 IP/mm 的 Ronchi 光栅, 环境温度 10°C , 莫尔纹间距 2.5mm , CCD 曝光时间 $1/1000 \text{s}$ 。可以认为两个温度场均为点源温度场且具有轴对称性。



Fig. 4 Moire tomogram of flame of a spirit lamp

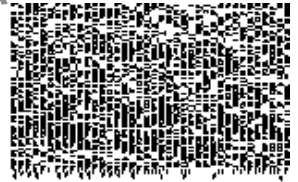


Fig. 5 Moire tomogram of a gun muzzle

我们按经典的假设, 反演 Radon 变换式, 用 ART 算法结合最大熵准则, 跟踪莫尔偏折图上的某一条纹, 求解该条纹高度截面上的 $\Delta n(x, y)$ 。由气体折射率 n 与压力 $P(\text{mPa})$, 温度 $T(\text{K})$ 和波长 $\lambda(\text{\AA})$ 的关系^[4]: $T = 77.6(1 + 7.52 \times 10^{-3} \lambda^2) P \times 10^6 / (n_0 - 1 + \Delta n)(\text{K})$ (15)

重建该截面的温度场。

图 6 是重建的酒精灯焰心上部 2mm 处的截面温度分布, 最高温点的温度约在 180°C , 焰心处有较大凹陷。按照我们给出的误差模型, 在燃烧瞬间取 $\varepsilon = 1 \sim 2$ 是合理的, 相对误差在 $2\% \sim 5\%$; 图 7 是



Fig. 6 Temperature distribution of the Plane 2mm above the center of flame

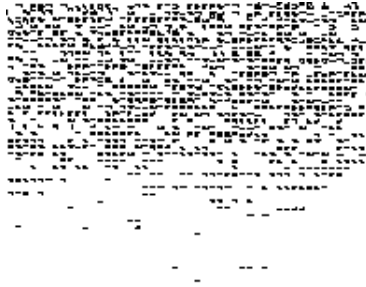


Fig. 7 Temperature distribution of a gun muzzle

重建的双基发射药模拟膛口温度场, 中心温度 450°C 。对于这一爆炸过程 $\varepsilon(\Delta n)$ 是比较大的, 以上面的误差公式计算相对误差在 10% 左右。

按 (14) 式的计算, $|\Delta n_m(r)| > |\Delta n(r)|$, 而 $\Delta n < 0$, 似乎重建场 T_m 应高于实际温度。但在实验中, 我们用热电偶校准酒精灯起燃时焰心上方 2mm 处的温度得到的值约 200°C , 用于

涉层析法得到该层面的温度峰也在 190℃, 而用光谱分析得到我们所用的火药的点火温度是大于 500℃. 重建温度偏低. 分析原因, 不妨再看一下经典的莫尔层析算法. 如图 8 所示, $(-R, R)$ 为测试段, 光线 S 经场偏折后投影至 P 点, 我们追踪 P 处的莫尔条纹, 并沿 x 轴反向投影以重建高度为 P 的截面温度场. 实际上, P 处的投影值只能作为重建光线 S 所成曲面的依据, 所以, 我们用温度场低温曲线上的数据重建高温截面就造成测量温度低于实际温度, 并在截面上径向低温处偏离较大的结果. 对于膛口燃气场, 因为轴心处是温度峰值, 故峰值温度处偏低较大.

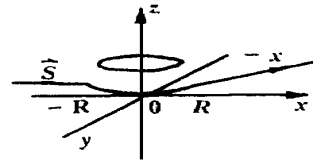


Fig. 8 Cross-section error in conventional Moire tomography

三、结论和改进方案

按我们的分析讨论, 经典的莫尔层析术的误差模型是场的函数, 这就给修正误差和迭代重建带来了困难, 尤其是轴向折射率梯度大的场. 问题的本质在于经典层析术的重建算法采样某

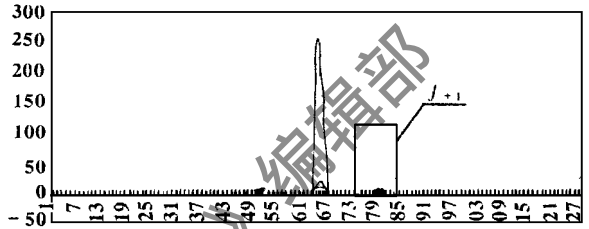


Fig. 9 Frequency spectrum of Moire tomogram

条莫尔条纹经细化和二值化后的特征线, 以之作为光线偏折角数据, 就难免产生上述的重建层面误差. 实际上, 平面光波经折射率场发生的波面变形, 是形成莫尔条纹的根本原因. 从这一点出发, 我们对莫尔图作傅里叶变换, 得到它的频谱如图 9 所示. 提取 + 1 级频谱, 并将之移到频谱面中心, 再作傅氏反变换, 计算相角的主值 $\varphi = \frac{\text{ImaginaryPart}}{\text{RealPart}}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, 对之作相位展开, 恢复变形波面. 然后读出相应高度截面的波面变形量作为投影数据进行 Radon 反变换, 重建该截面的温度场. 图 10 是重建的酒精灯火焰温度场的变形波前. 这种方法避免了对光波的几何光线近似带来的误差, 实验证明是行之有效的. 有关这方面的具体实施步骤和结果将另文详述.



Fig. 10 Reconstructed wavefront of light crossing the temperature field of spirit lamp flame

参 考 文 献

- 1 He A Zh, Yan D P. SPIE, 1991; 1553: 676~ 681
- 2 阎大鹏, 贺安之. 光学学报, 1990; 10(6): 533~ 539
- 3 Yan D P, Li F. SPIE. 1996; 2861: 24
- 4 Bar-Zir E, Glatt E. APPL OPT, 1981; 24(10): 4263~ 4266
- 5 贺安之, 阎大鹏. 激光瞬态干涉度量学. 北京: 机械工业出版社, 1993

* * *

作者简介: 姚 卫, 女, 1971 年 7 月出生. 博士生. 主要研究课题为流场的三维重建技术, 激光三维测量和相位恢复技术.

尤海航, 男, 1971 年 10 月出生. 博士生. 主要研究课题为流场的 X 光莫尔层析技术.