

光学谐振腔的分数傅里叶变换表示*

孔繁龙 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064)

代 明 林菊平

(西南技术物理研究所, 成都, 610041)

摘要: 用矩阵方法研究了多元件光腔, 特别是含透镜腔和望远镜腔的分数傅里叶变换特性, 然后从广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式出发, 推出了光腔的分数傅里叶变换的二维衍射积分表达式和分数傅里叶变换的矩阵表示式, 并作了讨论。

关键词: 光学谐振腔 分数傅里叶变换 $ABCD$ 矩阵

Expressions of fraction Fourier transforms for multielement optical resonators

Kong Fanlong, L Baida

(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Dai Ming, Lin Jiping

(Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu, 610041)

Abstract: The characteristics of multielement optical resonators, in particular, the resonator with an internal lens and telescopic resonator which can be represented in terms of fractional Fourier transforms (FRFTs) have been studied by means of the $ABCD$ matrix method. Then, starting from the generalized Huygens-Fresnel diffraction integral, the two-dimensional diffraction integral of optical resonators expressed as FRFTs has been derived and the corresponding matrix formulation has been given and discussed.

Key words: optical resonator fractional Fourier transforms (FRFTs) $ABCD$ matrix

* 本工作得到国家高技术强辐射重点实验室基金(No.H96-1)支持。

参 考 文 献

- 1 Irving B. Welding Journal. 1994; (2): 31~ 35
- 2 Heyden J, Nilsson K, Magnusson C. Laser welding of zinc coated steel. Proc 6th Int Conf Laser in Manufacturing, May 1989: 93~ 104
- 3 李力钧. 现代激光加工及其装备. 北京: 北京理工大学出版社, 1993: 122~ 123
- 4 Silney H A. Introduction to physical metallurgy. New York: McGraw-Hill Book Company, 1974

作者简介: 熊建钢, 男, 1965 年 4 月出生。讲师, 博士研究生。现从事材料焊接及激光加工方面的研究。
胡伦骥, 男, 1940 年出生。教授。现从事激光加工及激光与材料的相互作用等领域的研究。
刘建华, 男, 1946 年 7 月出生。副教授。现从事材料焊接及激光加工方面的科研和教学工作。

引言

分数傅里叶变换(FRFTs)是由Namias于1980年提出的^[1]。Mendlovic和Ozaktas在梯度折射率介质中找到了分数傅里叶变换的光学解释,同时指出了用简单光学系统可以实现分数傅里叶变换,即所谓Lohmann iv型和Lohmann ②型^[2,3]。由于分数傅里叶变换较常规傅里叶变换更具有一般性,因而对其做深入研究是十分必要的。国外有关研究十分活跃,然而在国内有关分数傅里叶变换的研究还刚刚起步。

FRFTs可以用矩阵表示,即对应光学系统的变换矩阵写成

$$h \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & f_d \sin^2 \varphi \\ -1/f_d & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

的形式^[4],式中, $\varphi = p\pi/2$, p 为FRFTs的变换阶数, f_d 为等效焦距。在本文中,我们把可以写成此种形式的矩阵称作FRFTs的特征矩阵,光学系统的FRFTs阶数 $p = 2\varphi/\pi$ 。通过引入定标参数后,FRFTs的表示式也可以写成积分形式^[5]。本文用矩阵的方法对光腔的FRFTs做了分析。然后,从广义惠更斯-菲涅耳衍射积分(亦称Collins公式)出发,得到了光腔的FRFTs的二维积分表示以及描述其FRFTs的矩阵表示,并做了分析讨论。

一、光腔的FRFTs的矩阵表示

如图1,一般多元件光腔可看作由曲率半径分别为 R_1 和 R_2 的两腔镜和构成腔内单程变换矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的光学元件组成。以镜1为参考该系统的单程变换矩阵为^[6]

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b/R_1 & b \\ -d/R_1 - a/R_2 + b/(R_1 R_2) + c & d - b/R_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

如果光腔能实现FRFTs,其变换矩阵写成(1)式的形式,则矩阵相应元素为 $A = D = \cos \varphi$

$$\begin{aligned} C &= -1/f_d \\ B &= f_d \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

下面讨论简单两镜光腔和一些典型多元件光腔的FRFTs特性。

1. 简单两镜光学谐振腔

如图2系统的单程变换矩阵为

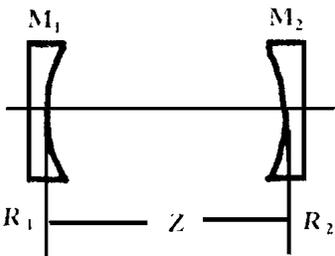


Fig. 2 Schematic diagram of a simple optical resonator

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - z/R_1 & z \\ -1/R_1 - 1/R_2 + z/(R_1 R_2) & 1 - z/R_2 \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

当 $R_1 = R_2 = R$ 时,容易把(4)式写成(1)式的形式。其中, $\cos \varphi = 1 - z/R$, $1/f_d = (1 + \cos \varphi)/R$ 。光腔的FRFTs阶数 $p = 2\arccos(1 - z/R)/\pi$ 。当 $R = z$ 时, $p = 1$,即对称共焦腔两腔镜上的场之间存在常规傅里叶变换关系。

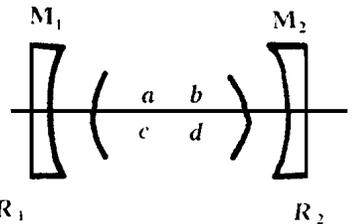


Fig. 1 Schematic diagram of a multi-element optical resonator

2. 多元件光学谐振腔

(1) 腔内含有一个焦距为 f (设 $f > 0$) 透镜的谐振腔(如图3)系统的单程变换矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{同时}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{f} & z_2 + z_1 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{z_1}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{f} & z_2 + z_1 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{z_1}{f} \end{pmatrix} \quad \text{内 (5)}$$

若把(5)式写成(1)式的形式,其必要条件为 $A = D$, 即 z_1, z_2 的关系为

$$z_2 = \{ [R_1 R_2 + f(R_1 - R_2)] / [R_1 R_2 + (R_1 - R_2)(z_1 - f)] \} z_1 \quad (6)$$

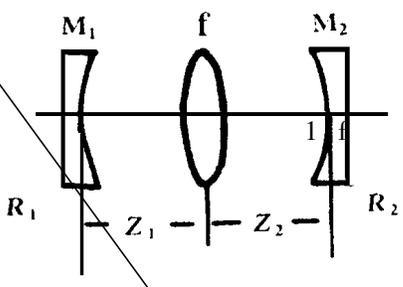


Fig. 3 Schematic diagram of a resonator with an internal lens

讨论:

(A) 当 $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$ 时, (5)式变为

$$M' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z_2/f & z_2 + z_1(1 - z_2/f) \\ -1/f & 1 - z_1/f \end{pmatrix}$$

即对含透镜平行平面腔,光腔若满足FRFTs的必要条件, (6)式成为 $z_1 = z_2 = z$, 即为Lomann iv型^[2], 此时, $\cos \varphi = 1 - z/f$, 变换阶数 $p = 2\arccos(1 - z/f)/\pi$, 当 $f \geq z/2, p \in [0, 2]$; f 为其它值时, p 为复数。

(B) 当 $R_1 = R, R_2 \rightarrow \infty$ 时, (5)式变为

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{f} - \frac{1}{R} & z_2 + z_1(1 - \frac{z_2}{f}) \\ -\frac{1}{f} - \frac{1}{R} & 1 - \frac{z_1}{f} \end{pmatrix} \quad \text{FR}$$

由(6)式得当 $z_2 = [(f - R)/(z_1 - f - R)] z_1$, 容易写出该种腔型的形如(1)式的FRFTs的特征矩阵。其中, $\cos \varphi = 1 - z_1/f - 1/R, 1/f_d = 1/f + \cos \varphi/R$ 。光腔的FRFTs阶数 $p = 2\arccos(1 - z_1/f)/\pi$, 当 $f \geq z_1/2$ 时 $p \in [0, 2]$; f 为其它值时, p 为复数。

(2) 望远镜腔。如图4, 对于望远镜腔系统有 $z_2 + z_3 = f_1 + f_2 - \Delta$ (式中, f_1, f_2 为构成望远镜二透镜焦距, Δ 为望远镜系统的失调量)。我们不妨把该系统分成两部分考虑, 设从镜1到RP(虚线处), 满足FRFTs关系, 变换特征矩阵为 M_1 , 变换阶数为 p_1 , 从RP到镜2也满足FRFTs关系, 变换的特征矩阵为 M_2 , 变换阶数为 p_2 。

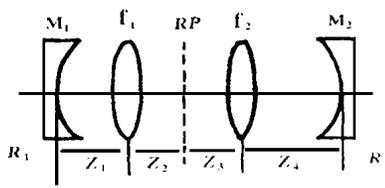


Fig. 4 Schematic diagram of a telescopic resonator

由2中(B)讨论知, 当 $z_2 = [(f_1 - R_1)/(z_1 - f_1 - R_1)] z_1$ 时, 有

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & f_{d1} \sin^2 \varphi \\ -1/f_{d1} & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中, $\cos \varphi_1 = 1 - z_1/f_1, 1/f_{d1} = 1/f_1 + \cos \varphi_1/R_1, p_1 = 2\arccos(1 - z_1/f_1)/\pi$ 。

类似地, 可推出当 $z_4 = [(f_2 + R_2)/(z_3 - f_2 + R_2)] z_3$ 时, 有

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \Phi_2 & f_{d2} \sin^2 \Phi_2 \\ -1/f_{d2} & \cos \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中, $\cos \Phi_2 = 1 - z_4/f_2$, $1/f_{d2} = 1/f_2 + \cos \Phi_2/R_2$, $p_2 = 2\arccos(1 - z_4/f_2)/\pi$ 。

整个系统的变换矩阵为

$$M = M_2 \cdot M_1 \text{ 的形} \begin{pmatrix} \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - \frac{f_{d2}}{f_{d1}} \sin^2 \Phi_2 & f_{d1} \cos \Phi_2 \sin^2 \Phi_1 + f_{d2} \cos \Phi_1 \sin^2 \Phi_2 \\ -\cos \Phi_1/f_{d2} - \cos \Phi_2/f_{d1} & \cos \Phi_2 \cos \Phi_1 - (f_{d1}/f_{d2}) \sin^2 \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

当 $|f_{d1} \sin \Phi_1| = |f_{d2} \sin \Phi_2| = |f_e|$ 时, (9) 式可写为

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & f_e \sin \Phi \\ -\sin \Phi/f_e & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, FRFTs 阶数 $p = p_1 + p_2$ 。令 $1/f_d = \sin \Phi/f_e$, 可以把式写成如(1)式的 FRFTs 特征矩阵形式。

二、光腔的 FRFTs 的积分表示

推广 FRFTs 的定义^[5]到二维得

$$[F^p q](u_2, v_2) = \iint q(u_1, v_1) B_p(u_2, v_2; u_1, v_1) du_1 dv_1 \quad (11)$$

式中, F 是 FRFTs 算符, p 是变换阶数, $q(u_1, v_1)$ 为初始光场的复振幅。

$$B_p(u_2, v_2; u_1, v_1) = \frac{\exp[-i(\pi/2 - \Phi)]}{\sin \Phi} \exp\{i\pi[(u_2^2 + v_2^2 + u_1^2 + v_1^2) \cot \Phi - 2(u_1 u_2 + v_1 v_2) \csc \Phi]\} \quad (12)$$

$\Phi = p\pi/2$

对于图 2 所示的光腔, 设其单程变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 两腔镜上的场分布可以用广义衍射积分公式联系起来。设腔镜 R_1, R_2 上的场复振幅分布分别为 $U_1(x_1, y_1)$, $U_2(x_2, y_2)$, 由 Collins 公式得^[6]

$$U_2(x_2, y_2) = \iint U_1(x_1, y_1) K(x_1, y_1; x_2, y_2) dx_1 dy_1 \quad (13)$$

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \{\exp[-i(\pi/2 - 2\pi L/\lambda)]/(\lambda B)\} \exp\{i\pi[(\lambda B)] [A(x_1^2 + y_1^2) + D(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]\} \quad (14)$$

引入定标参数 s_1, s_2 , 令

$$u_1 = x_1/(\lambda s_1), v_1 = y_1/(\lambda s_1) \quad (15)$$

$$u_2 = x_2/(\lambda s_2), v_2 = y_2/(\lambda s_2)$$

并且做函数变换

$$U_1(x_1, y_1) \equiv u_1(u_1, v_1) \quad (16)$$

$$U_2(x_2, y_2) \equiv u_2(u_2, v_2)$$

联立(14), (15), (16) 式得

$$u_2(u_2, v_2) = s_1^2 \exp[-i(\pi/2 - 2\pi L/\lambda)]/B \times \iint u_1(u_1, v_1) \exp\{i\pi s_1 s_2/B [A(s_1/s_2)(u_1^2 + v_1^2) + D(s_2/s_1)(u_2^2 + v_2^2) - 2(u_1 u_2 + v_1 v_2)]\} du_1 dv_1 \quad (17)$$

如果(17)式可以用(11)式的 FRFTs 形式来表示, 则应有

$$A s_1/s_2 = \cos \Phi \quad (18)$$

$$Ds_2/s_1 = \cos \varphi \quad (19)$$

$$B/(s_1 s_2) = \sin \varphi \quad (20)$$

在(18), (19), (20)式同时满足的条件下, (17)式可写为

$$u_2(u_2, v_2) = (s_1/s_2) \exp[i2\pi/(M)] \exp(-i\varphi) \times [F^p u_1](u_2, v_2) \quad (21)$$

如果略去(21)式前面的位相因子, 则与文献[7]用另一种FRFTs定义推出的结论相同, 这表明了光腔腔镜上的场分布之间可以从FRFTs的观点来考虑。

光腔的G参数定义为^[6]

$$G_1 = A = a - (b/R_1), G_2 = D = d - (b/R_2) \quad (22)$$

则(18), (19), (22)式得 $\cos^2 \varphi = G_1 G_2$ (23)

光腔的稳定性可由(23)式来判定, 变换阶数 $p = 2\arccos[\pm \sqrt{G_1 G_2}]/\pi$ 。

现在, 令 $A = A s_1/s_2, B = B/(s_1 s_2), D = D s_2/s_1$, 则有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A s_1/s_2 & B/(s_1 s_2) \\ C s_1 s_2 & D s_2/s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (24)$$

设 $1/f = \sin \varphi$, (24)式可写为(1)式的形式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A s_1/s_2 & B/(s_1 s_2) \\ C s_1 s_2 & D s_2/s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & f \sin^2 \varphi \\ -1/f & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (25)$$

式中, $s_1^4 = D/(f^2 C^2 A), s_2^4 = A/(f^2 C^2 D), \cos \varphi = \pm \sqrt{AD}$

三、小 结

本文的研究表明, 对一般无源光学谐振腔, 当满足一定条件时可用矩阵光学方法写为FRFTs形式, 或者通过引入适当定标参数 s_1, s_2 写为FRFTs的积分形式。因此, 光腔问题也可纳入广义傅里叶变换光学的框架之中。这不仅有理论上的意义, 也会对实际工作带来方便。我们对FRFTs感兴趣原因在于, 实际上, FRFTs与广义惠更斯菲涅耳衍射积分相联系^[5], 可实现更广泛的光学变换, 在光信息处理、光腔和光传输变换等方面有广阔应用前景^[7], 而常规傅里叶变换则限于傅里叶谱面间的运算。与此有关的研究工作在进之中, 所得结果将另文发表。

参 考 文 献

- 1 Namias V. J Inst Math Its Appl, 1980; 25: 241~ 265
- 2 Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1993; A10(9): 1875~ 1881
- 3 Mendlovic D, Ozaktas H M. J O S A, 1993; A10(12): 2522~ 2531
- 4 Bernardo L M. Opt Engng, 1996; 35(3): 732~ 740
- 5 Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1995; A12(4): 743~ 751
- 6 吕百达. 激光光学(第二版). 成都: 四川大学出版社, 1992
- 7 Ozaktas H M, Mendlovic D. Opt Lett, 1994; 19(21): 1678~ 1680