

高斯光束的复数变换与几何光学方法*

林 娟

(福建商业干部学校基础教研室, 福州, 350007)

郭福源

(福建师范大学激光研究所, 福州, 350007)

摘要: 从高斯光束复参数的三角形式和菲涅耳数出发, 利用复数分式线性变换方法, 推导出高斯光束参数变换的类几何光学公式; 并利用共轭、互易、反演点对变换方法图解高斯光束传输变换特性。

关键词: 高斯光束 菲涅耳数 互易变换 类几何光学公式 焦移

Complex transformation and geometrical optics method of Gaussian beam

Lin Juan

(Teaching and Research Section of Basic Courses, Fujian Commercial Cadre's School, Fuzhou, 350007)

Guo Fuyuan

(Institute of laser, Fujian Teacher's University, Fuzhou, 350007)

Abstract In this paper, starting from triangle expressions of complex parameters and Fresnel number of Gaussian beam, the method of complex fraction linear transformation is employed to derive the similar geometrical optics formula of Gaussian beam's complex parameter transformation. The conceptions of conjugation, exchange and inverse evolve point pair are used to explain the transformation properties of Gaussian beam.

Key words: Gaussian beam Fresnel number exchange transformation similar geometrical optics formula focal shift

一、引 言

高斯光束变换是激光光学中一个重要的研究课题, 基于 $ABCD$ 定律的矩阵光学方法已较系统、完整地描述了激光束通过复杂光学系统的传输变换^[1,2]; 无光阑约束时的高斯光束菲涅耳数与焦移概念的研究也已开展^[3,4]。为了更加合理、简洁地描述高斯光束传输变换的本性, 本文以复数三角形式描述高斯光束复参数, 在复数空间建立高斯光束变换的简单关系式, 并转换至实数空间, 类似于几何光学中物象位置和放大率的牛顿公式和高斯公式形式, 建立并图解高斯光束的类牛顿公式和类高斯公式, 进一步阐明了高斯光束的菲涅耳数与焦移概念的物理意义, 以简单的关系式, 较清楚地阐明高斯光束的传输变换规律及其本性。

二、高斯光束复参数的三角形式

由于高斯光束是赫姆霍茨方程在缓变振幅近似下的一个特解, 高斯光束的基本性质可以

* 福建省自然科学基金资助。

由复参数 q 描述, $q = Z + iZ_R$ 或 $1/q = 1/R - iN(\pi w^2)$, 其中, Z 为以高斯光束束腰为原点的传播距离, $Z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ 为高斯光束的瑞利长度, w_0 为包含 86.5% 光束总功率的高斯光束束腰半径, λ 为光束波长, $R = Z + Z_R^2 / Z$, $w = w_0(1 + Z^2 / Z_R^2)^{1/2}$ 分别为传播距离 Z 处的光束等相面曲率半径和包含 86.5% 光束总功率的光束半径(本文角标 86.5 均省略)。本文将复参数 q 以复数三角形表示: $q = |q| \exp(i\theta) = |q| (\cos\theta + i\sin\theta)$ (1)

式中, $|q| = (Z^2 + Z_R^2)^{1/2}$ 为高斯光束复参数 q 的模; $\theta = \arctg(Z / Z_R)$ 为高斯光束复参数 q 的幅角, 它与传播距离 Z 处的高斯光束附加相移 $\psi = \arctg(Z / Z_R)$ 互为余角, 即 $\theta + \psi = \pi/2$ 。

据(1)式与高斯光束的基本性质, 本文重新定义高斯光束的菲涅耳数 N :

$$N = \pi w^2 / (\lambda R) = Z / Z_R = \text{ctg}\theta = \text{tg}\psi \quad (2)$$

由(2)式知, 本文重新定义的高斯光束菲涅耳数 N 的物理意义就是复参数 q 的幅角 θ 的余切, 如图 1a 所示, 它比文献[3]中用 Collins 图及其双重表象描述的 $N_C = \text{tg}\theta$ (即对应本文的 $N = \text{tg}\psi$) 的物理意义更为明确、简洁、合理, 且便于图解。(1), (2)式表明: 图 1a 的坐标实轴(z 轴)上的以束腰为原点的传播距离 Z 和以曲率中心为原点的等相面曲率半径 R 的坐标为以复参数 q 的模 $|q|$ 为半径的圆的反演点对; 虚轴(y 轴)上的光束半径参量 $y = \pi w^2 / \lambda$ 和瑞利长度 Z_R 的坐标也为以复参数 q 的模 $|q|$ 为半径的圆的反演点对。

由此, 本文导出高斯光束等相面曲率半径 R 和光束半径 w 的表达式:

$$R = |q| \sec\theta = Z_R(N + 1/N) \quad (3)$$

$$w = w_0 \csc\theta = w_0(1 + N^2)^{1/2} \quad (4)$$

(3), (4)式表明: 由重新定义的高斯光束菲涅耳数 N 描述的高斯光束基本关系式变为非常简洁的形式。同时, 由(4)式的三角函数关系可知, 传播距离 Z 处的光束半径 w 的数值可直接由图 1a 中直角三角形 ΔOw_0w 图解。

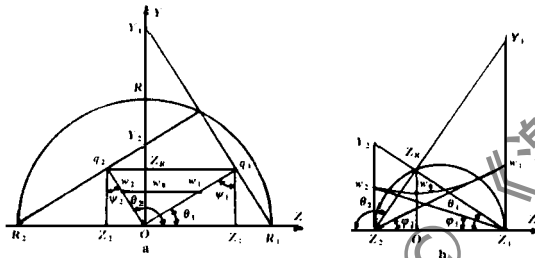


Fig. 1 The geometrical form of Gaussian beams complex parameter and the exchange transformation
a—complex space b—real number space

若将图 1a 的复数空间内的复参数 q 的描述转换至实数空间, 如图 1b 所示, 它简明地图解了高斯光束的基本性质。

三、互易变换

由于任意高斯光束都是共焦谐振腔的自再现本征模, 不难证明, 任意传播距离 Z_1 的高斯光束复参数 q_1 均可与另一传播距离 Z_2 的高斯光束复参数 q_2 满足如下变换:

$$q_2 = iq_1 \text{tg}\theta_1 \quad (5)$$

由(1)~(4)式知, (5)式可化成:

$$N_1 \cdot N_2 + 1 = 0 \quad (6)$$

$$\pi w_1 w_2 / \lambda = R_1 = -R_2 \quad (7)$$

鉴于(6), (7)式中下标 1, 2 均可互易, 我们称满足(5)式的高斯光束复参数的变换为互易变换, 如图 1a 所示, 图中, Z_1, Z_2 处的高斯光束复参数 q_1, q_2 的幅角 θ_1, θ_2 满足 $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$, 虚轴上的光束半径参量 $y_1 = \pi w_1^2 / \lambda$ 与 $y_2 = \pi w_2^2 / \lambda$ 为以等相面曲率半径 R_1 (或 R_2) 绝对值为半径的圆的反演点对。若将图 1a 描述的高斯光束互易变换转换至实数空间, 它们与以 R_1 (或 R_2) 为直径的圆有如图 1b 所示的关系。

若考虑包含 99.95% 光束总功率的光束半径 $w_{99.95} = 0.61\pi w$ 为全功率光束半径, 并以此为瞳孔考察其夫琅和费圆孔衍射角半径 $\varphi = 0.61\lambda/w_{99.95}$, 及其距离瞳孔 R 处的艾里斑半径 $\sigma = \varphi R$, 由(7)式知, $w_2 = R_1\varphi_1$ 或 $w_1 = -R_2\varphi_2$, 即 Z_1, Z_2 处的光束半径 w_1, w_2 互为对方全功率光斑 $w_{99.95}$ 的衍射艾里斑半径。另一方面, 由(7)式知, Z_1, Z_2 处的光束等相面位置互为对方等相面曲率中心。由于传播距离 $Z_1 = 0$ 与 $Z_2 = \infty$ 互为反演点对, (7)式表明高斯光束远场半发散角 $\theta_0 = \lambda/(\pi w_0)$ 为束腰处全功率光斑的夫琅和费圆孔衍射角半径; 束腰半径 w_0 为无穷远处全功率光斑的夫琅和费衍射艾里斑半径。

四、基本变换公式

对于高斯光束通过由矩阵元 A, B, C, D 描述的一般光学系统的变换, 规定转入空间光束参数无上标, 输出空间参数以上标标注, 则根据高斯光束复参数线性变换的 ABCD 定律:

$$q' = (Aq + B)/(Cq + D) \quad (8)$$

式中, $AD - BC = n/n' = \lambda/\lambda' = -f/f'$, n 为光束所在空间的介质折射率, f 为有焦光学系统中以主面为原点的焦距。本文导出高斯光束菲涅耳数 N 的变换规律为:

$$N' = (n'/n)[ACZR N^2 + (AD + BC)N + ACZR + BD/ZR] \quad (9)$$

则当输入空间参考平面与束腰重合, $N = 0$, 输入、输出空间参考平面为物象共轭平面, $B = 0$ 时, (9)式化成:

$$N' = (C/D)ZR \quad (10)$$

由(10)式知, 对于无焦光学系统, $C = 0$, 物象共轭平面之间的高斯光束变换满足束腰至束腰的变换, $N' = N = 0$; 对于有焦光学系统, $C \neq 0$, 物象共轭平面之间的高斯光束变换不满足束腰至束腰的变换, $N' \neq 0$, 即在有焦光学系统中, 输出空间高斯光束束腰位置必然偏离输入空间高斯光束束腰位置的共轭几何象点, 这种现象称为高斯光束的焦点移动, 简称焦移。

五、类牛顿公式

对于由矩阵元 $A = 0, B = -f, C = -1/f', D = 0$ 描述的物象双方焦面之间的高斯光束变换, 即傅里叶变换, 由(8)式知, 该变换为倒数变换:

$$q_F' \cdot q_F = ff' \quad (11)$$

式中, 下标 F 标注焦面处光束参数, 从形式上看, (11)式类似于几何光学的牛顿公式, 故称类牛顿公式。由(1)~(4)式知, (11)式化成:

$$N_F' = -N_F \quad (12)$$

$$(-R_F')x_0 = (-R_F)x_0' = ff' \quad (13)$$

$$(\pi w_F'^2/\lambda')Z_R = (\pi w_F^2/\lambda)Z_R' = -ff' \quad (14)$$

式中, x_0, x_0' 分别为以焦点为原点的高斯光束物距、象距, 即焦点至束腰的距离, 如图 2 所示, (13)式表明, 物方焦面上的高斯光束等相面曲率中心 E 与象方束腰位置 O' 成物象共轭关系, 反之亦然, 由(3)式知, 仅当 $N_F \rightarrow \infty$ 时, (13)式退化为几何光学的牛顿公式: $x_0' x_0 = ff'$ 。在图 2 中, 由(12)式知, 物、象双方焦面 F, F' 处的高斯光束复参数 q_F, q_F' 的幅角 θ_F, θ_F' 满足 $\theta_F' = \pi - \theta_F$, 同时, 由(11)~(14)式知, 物象双方关于以 $(-ff')^{1/2}$ 为半径的焦距圆的反演线段对有: $FH = -f, H'F' = f'; OF = -x_0, F'E' = -R_F'; EF = R_F, F'O' = x_0'; FZ_R = |q_F|, F'Z_R' = |q_F'|; FY_F = \pi w_F^2/\lambda, O'Z_R' = Z_R'; OZ_R = Z_R, F'Y_F' = \pi w_F'^2/\lambda'$ 。反演线段图解以 $FZ_R, F'Z_R'$ 为例, 做圆弧 Z_RQ , 即 $Z_RF = QF$, 令 $QH \perp Q'H'$, 则三角形 $\triangle QFH \sim \triangle H'F'Q'$, 即线段

$QF \cdot FH = H'F' \cdot F'Q'$, 做圆弧 $Q'ZR'$, 即 $Q'F' = ZR'F'$, 则线段 $ZR'F' \cdot FH = H'F' \cdot F'ZR'$, 即 $|q_F'| \cdot |q_F| = -ff'$ 。

仿照几何光学的横向放大率 $\beta = y'/y$ 的定义, 本文定义高斯光束束腰半径的放大率为高斯光束横向放大率 $\beta_G = w'_0/w_0$, 则由(14)式可知:

$$\beta_G = -f/|q_F| = |q_F'|/f' \quad (15)$$

由(13)式知, 高斯光束横向放大率 β_G 与束腰位置的几何光学横向放大率 $\beta_0 = -f/x_0$ 的关系满足: $\beta_G = \beta_0/(1 + 1/N_F^2)^{1/2}$, 仅当 $N_F \rightarrow \infty$ 时, (15)式退化为几何光学横向放大率公式。

由(13)式知, 在图2中, E, O' 与 O, E' 为两对物象共轭点, 即象方束腰位置 O' 偏离物方束腰 O 的几何象点 E' , 偏离量 $E'O'$ 即为焦移量 $\Delta x'_0 = x'_0 - x'$, 根据几何光学的牛顿公式, $x_0 x' = ff'$, 则焦移量 $\Delta x'_0$ 与几何光学象距 x' 的关系为:

$$\Delta x'_0 = -x'/(1 + N_F^2) \quad (16)$$

(16)式表明: 对于有焦光学系统, 总存在一定的焦移量 $\Delta x'_0$, 仅当物方焦面处高斯光束菲涅耳数 $N_F \rightarrow \infty$ 时, 焦移量 $\Delta x'_0 = 0$, 即此时(13)、(15)式分别退化为几何光学的牛顿公式与横向放大率公式。

六、类高斯公式

对于由矩阵元 $A = 1, B = 0, C = -1/f', D = n/n'$ 描述的物象双方主面之间的高斯光束变换, 由(8)式知, 变换公式为:

$$f'/q_{H'} + f/q_H = -1 \quad (17)$$

式中, 下标 H 标注主面处光束参数。(17)式相继经历倒数、平移、倒数三个变换, 从形式上看, (17)式类似于几何光学的高斯公式, 故称类高斯公式。由(1)~(4)式知, 物象双方主面之间的高斯光束菲涅耳数变换公式为:

$$N_{H'} = N_H + \pi w_H^2 / (\lambda) = N_H + (HN_H^2)ZR/f \quad (18)$$

由于物象双方主面间的高斯光束光斑半径相等, $w_{H'} = w_H$, 则由(4)式知, 高斯光束横向放大率 $\beta_G = w'_0/w_0$ 的形式仍与几何光学的横向放大率的形式相似:

$$\beta_G = (n|q_{H'}|)/(n'|q_H|) \quad (19)$$

参考文献

- 1 吕百达, 季小玲, 周兴泉. 光学学报, 1991; 11(2): 115~123
- 2 吕百达. 激光光学, 第二版. 成都: 四川大学出版社, 1992: 99
- 3 王绍民, 林强, 伯那毕 et al. 拦光光学导论. 杭州: 杭州大学出版社, 1991: 14
- 4 Li Y J, Wolf E. Opt Commun, 1982; 42(3): 151~156

* * *

作者简介: 林娟(附照片), 女, 1965年11月出生。讲师。从事数学的教学及其理论研究工
郭福源, 男, 1965年1月出生。硕士, 讲师。从事教学及光学、激光理论与应用的研究。

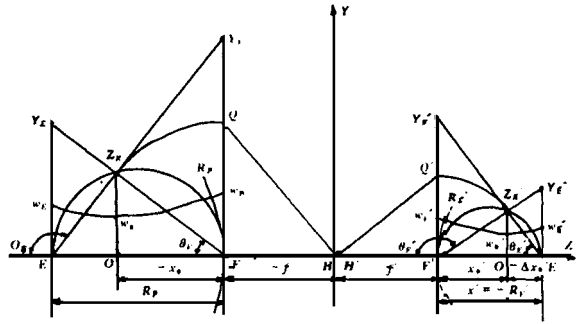


Fig. 2 The similar Newton's formula of Gaussian beams transformation

