

二元光学衍射透镜波象差分析

*
殷功杰 薛鸣球

(中科院西安光机所, 西安, 710068)

摘要: 通过对衍射透镜一级衍射象的波象差分析, 由比较系数方法导出其赛得和数。

关键词: 波象差 二元光学 衍射透镜 赛得和数

Wavefront aberration analysis of diffractive lenses

Yin Gongjie, Xue Mingqiu

(Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Academia Sinica, Xi'an, 710068)

Abstract: The binary optical diffractive lenses have been widely used in eliminating the aberration and chromatism of optical system. Formerly, the method of Sweett's equivalent refraction lenses had been widely used in analyzing aberration of a optical system. This paper presents a method of investigating the wavefront aberration of plane and curved diffractive lenses to derive Seidel sums.

Key words: wavefront aberration binary optics diffractive lenses Seidel sums

一、引言

二元光学衍射透镜已广泛用于光学系统中来消色差和单色象差^[1~4]。在对衍射透镜进行象差分析时, 人们广泛采用 Sweett 等人提出的等效折射透镜方法^[5, 6], 即用折射率无穷大的等效薄透镜来求出其初级象差系数。我们则通过对波象差进行分析来导出其初级象差系数, 其思路更为简单直接, 物理意义明确。所得结果与等效透镜法完全一致。

随着制作工艺水平的提高, 越来越多的衍射透镜制作在曲面基底上^[4, 8]。因其弯曲量可作作为变数, 为象差校正提供更大灵活性, 本文先就平面基片上的情况进行了分析, 接着又推广到弯曲基片的情况。虽然前者可归结为后者的一个特例, 但先从平面这种简单情况分析是有益的。弯曲基片情况下, 波象差分析时展开式中有更多复杂项的取舍问题。参考平面情况可以避免得出错误的结论。

二、一级衍射象及其波象差分析

1. 一级衍射波

用于光学系统的衍射透镜都具有轴对称的表面轮廓。对设计波长 λ_0 , 其位相函数一般为

$$\Phi_d(r) = 2\pi(Ar^2 + Gr^4 + \dots) \quad (1a)$$

式中, r 为衍射透镜面上的径向坐标, 系数 A 和透镜光焦度 k 有关, $k = -2A \times \lambda_0$, 系统 G 可作为变数在光学系统中校正球差和其它象差^[2, 3, 8]; 若是会聚透镜, 则 $\Phi_d(r) < 0$ 。为保证衍射

* 本所青年室。

透镜足够薄,常使 $\Phi_l(r) = 2\pi(m + Ar^2 + Gr^4 + \dots)$ (1b)
 式中, m 为正整数。其取值使 $-2\pi \leq \Phi_l(r) \leq 0$ 。即 $-1 \leq m + Ar^2 + Gr^4 + \dots \leq 0$ 决定的 r 的
 边界 r_m 就是衍射透镜各环带半径。

对波长 $\lambda \neq \lambda_0$ 的成象光波,其位相函数变为

$$\Phi_l(r) = \alpha 2\pi(m + Ar^2 + Gr^4 + \dots) \quad (2)$$

式中, $\alpha = (\lambda_0/\lambda)[n(\lambda) - 1]/[n(\lambda_0) - 1]$ (3)

式中, $n(\lambda)$ 为制作衍射透镜材料的折射率。则衍射透镜的透过系数为

$$t(r, \lambda) = \exp[i\alpha 2\pi n(m + Ar^2 + Gr^4 + \dots)] \quad (4)$$

我们有其傅氏级数展开式

$$t(r, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i2\pi n(m + Ar^2 + Gr^4 + \dots)] \quad (5a)$$

式中, $c_n = \exp[-i\pi(\alpha - n)] \sin[\pi(\alpha - n)] / [\pi(\alpha - n)]$ (5b)

所以,对于非设计波长的成象光波,必然出现多级次衍射象。其中, n 级衍射的衍射效率
 为 $\eta_n = c_n c_n^* = \text{sinc}^2(\alpha - n)$, 光焦度 $k_n = -2nA/\lambda$ 。当忽略材料色散时, $\alpha = \lambda_0/\lambda$ 。若设计波
 长 λ_0 为成象波段的中心, α 分布在 1 附近,一级衍射光能量最大,一般都被选来作为成象光
 波。由(5a)式可知 $n = 1$ 时位相函数和(1a)相同。光焦度为 $k_1 = -2A/\lambda$ 。今后我们便选取第
 一级衍射波进行波象差分析。

2. 波象差分析

(1) 平面基片情况 坐标系选取如图

1。 z 轴和衍射透镜对称轴重合。原点在
 透镜中心, xoy 面与透镜面重合。孔径光
 阑在透镜面上,透镜半径为 h 。不失一般
 性,设物在 xoz 面内,其高度为 X_M 。物上
 任一点 $P(x_1, 0, z_1)$ 。设 $Q(x, y, 0)$ 为光
 瞳上任一点。由 P 点发出的入射球面波
 在光瞳上的位相分布为: (设 P 点位相为
 零)

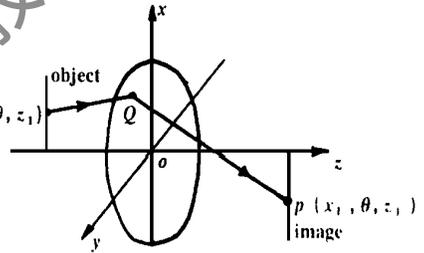


Fig. 1 Geometry of flat diffractive lens, object and image in Cartesian coordinate system

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \pm \frac{2\pi}{\lambda} PQ = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - z_1)^2} \\ &= \pm \frac{2\pi}{\lambda} \left[|z_1| + \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{2|z_1|} - \frac{1}{8} \frac{[(x - x_1)^2 + y^2]^2}{|z_1|^3} + \dots \right] \end{aligned}$$

当 $z_1 < 0$ 时为实物,上式取正号。当 $z_1 > 0$ 时为虚物,上式取负号。两种情况下都得到

$$\Phi_i = - \frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{2z_1} - \frac{1}{8} \frac{[(x - x_1)^2 + y^2]^2}{z_1^3} + \dots \right] \quad (6a)$$

由(1)式,则出射波的位相分布为

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= - \frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{2z_1} - M(x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{[(x - x_1)^2 + y^2]^2}{z_1^3} - N((x - x_1)^2 + y^2)^2 + \dots \right] \quad (6b) \end{aligned}$$

当 $P(x_1, 0, z_1)$ 满足近轴条件时,上述级数展开式中可以略去第三项及其它更高级次项。
 则上述两式分别变为:

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1} - \frac{x_1}{z_1}x + \frac{x_1^2}{2z_1} \right] + \dots \quad (7a)$$

$$\Phi_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{1 - 2z_1 M}{2z_1} (x^2 + y^2) - \frac{x_1}{z_1}x + \frac{x_1^2}{2z_1} \right] \quad (7b)$$

比较上两式中非常数项($x^2 + y^2$)和 x 的系数。因 Φ_1 对应于近轴物点 $P(x_1, 0, z_1)$, 则 Φ_0 对应的近轴象点 $P'(x_1', 0, z_1')$ 坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 / (1 - 2z_1 M) = x_1 / (1 + z_1 k_1) \\ z_1' &= z_1 / (1 - 2z_1 M) = z_1 / (1 + z_1 k_1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以 $P'(x_1', 0, z_1')$ 为球心的理想参考球面和出射波面之差即为波象差。将参考球面波在透镜面上位相分布函数展开成级数多项式并和(6b)式相减。对于初级波象差, 两者都只保留到展开式第三项, 并以 $k_1 = -2M$ 代入。去掉括号外的 $2\pi/\lambda$, 得到以光程差表示的波象差。去掉常数项, 整理得

$$\begin{aligned} W(x, y, x_1) &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{4} k_1^3 \left[1 + 3 \left(\frac{2}{z_1 k_1} + 1 \right)^2 - 8 \mathcal{L}G \right] (x^2 + y^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[k_1^2 \left(1 + \frac{2}{z_1 k_1} \right) \frac{x_1}{z_1} x (x^2 + y^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k_1 \frac{x_1^2}{z_1^2} x^2 + \frac{1}{4} k_1 \frac{x_1^2}{z_1^2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

设物方和象方孔径角分别为 u, u' 。其符号规则为: 光轴以锐角方向转动光线, 顺时针为正, 逆时针为负。则有

$$u' - u = h k_1 = h(1/z_1 - 1/z_1) \quad (10)$$

定义共轭量

$$C = \frac{u + u'}{u - u'} = \left[\frac{2}{z_1 k_1} + 1 \right] y \quad (11)$$

并将坐标 x, y, x_1 进行规一化

$$\bar{x} = x/h, \quad \bar{y} = y/h, \quad \bar{x}_1 = x_1/XM$$

将(11)式及规一化坐标 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1$ 代入(9)式得到

$$\begin{aligned} W(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1) &= \frac{1}{8} h^4 \left\{ \frac{1}{4} k_1^3 (1 + 3C^2) - 8 \mathcal{L}G \right\} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 + \frac{1}{2} k_1^2 Ch^2 J x_1 \bar{x} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} J^2 k_1 \bar{x}_1^2 \bar{x}^2 + \frac{1}{4} J^2 k_1 \bar{x}_1^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $J = XM_u = XM/h/z_1$ 为拉氏不变量。

根据初级波象差与赛得和数的关系有

$$\begin{aligned} W(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1) &= \frac{1}{8} S_{iv} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 + \frac{1}{2} S_{\oplus} \bar{x}_1 \bar{x} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{1}{2} S_{\ominus} \bar{x}_1^2 \bar{x}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (S_{\oplus} + S_{\ominus}) \bar{x}_1^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{1}{2} S_{(0)} \bar{x}_1^3 \bar{x} \end{aligned} \quad (13)$$

比较(12), (13)两式得到

$$\left. \begin{aligned} S_{iv} &= (1/4) h^4 k_1^3 (1 + 3C^2) - 8 \mathcal{L}G h^4 \\ S_{\oplus} &= k_1^2 h^2 J C \\ S_{\ominus} &= J^2 k_1 \\ S_{(0)} &= 0 \\ S_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(2) 基片弯曲情况 假设二元光学透镜制作在弯曲基片上, 坐标系如图 2 所示。图中只画出了 xoz 面内的情况。设衍射透镜呈回转对称二次曲面弯曲, z 轴为其对称轴。曲面方程为

$$z = \Delta = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - e^2)}{8R^3}(x^2 + y^2)^2 \quad (15)$$

式中, R 为顶点曲率半径, e 为偏心率。透镜位相函数仍由 (1a) 式决定, 其余各量和图 1 完全相同。那么物上点 P 发出的光波在二次曲面上的位相分布, 和 (6a) 式相似地有

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{(x_1 - x)^2 + y^2 - 2z_1 \Delta}{2z_1} - \frac{1}{8} \frac{[(x - x_1)^2 + y^2 - 2z_1 \Delta]^2}{z_1^3} + \dots \right] \quad (16a)$$

同样有出射波位相分布

$$\Phi_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \frac{(x_1 - x)^2 + y^2 - 2z_1 \Delta}{2z_1} - M(x^2 + y^2) - \frac{[(x - x_1)^2 + y^2 - 2z_1 \Delta]^2}{8z_1^3} - \lambda G(x^2 + y^2)^2 + \dots \right] \quad (16b)$$

注意在展开式各级次中的多项中略去了 Δ^2 项, 因为和多项式中其它项比较, Δ^2 项为高级项且 Δ 很小。取 $\Delta = (x^2 + y^2)/(2R)$ 时 同样有近轴近似

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \left(\frac{1}{2z_1} - \frac{1}{2R} \right) (x_1^2 + y_1^2) - \frac{x_1}{z_1} x + \frac{x_1^2}{2z_1} \right] \quad (17a)$$

$$\Phi_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[z_1 + \left(\frac{1 - 2Mz_1}{2z_1 k_1} - \frac{1}{2R} \right) (x^2 + y^2) - \frac{x_1}{z_1} x + \frac{x_1^2}{2z_1} \right] \quad (17b)$$

可见透镜基片的弯曲并不改变近轴物象关系。近轴象点仍为 $P' \left(\frac{x_1}{z_1 k_1}, 0, \frac{z_1}{1 + z_1 k_1} \right)$ 。

分析初级波象差时, 同样将 (16) 式保留级数展开式前三项。对于第三项, 将多项式平方逐项展开, 取 $\Delta = [(x^2 + y^2)/(2R)] + [(1 - e^2)/(8R)](x^2 + y^2)^2$, 并只保留 (9) 式中存在的项, 其余高次项, 常数项尽行略去, 得到

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ z_1 + \frac{(x^2 + y^2)2 - 2x_1 x + x_1^2 - 2\Delta z_1}{2z_1} - \frac{1}{8z_1^3} \left[\left(1 + \frac{z_1^2}{R^2} - \frac{2z_1}{R} - \frac{z_1 x_1^2}{2R^3} (1 - e^2) \right) (x^2 + y^2)^2 - 4 \left(x_1 - \frac{x_1 z_1}{R} \right) x (x^2 + y^2) + 4x_1^2 x^2 + 2 \left(x_1^2 - \frac{z_1 x_1^2}{R} \right) (x^2 + y^2) - 4x_1^3 x \right] \right\} \quad (18a)$$

$$\Phi_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ z_1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x_1 x + x_1^2 - 2\Delta z_1}{2z_1} - M(x^2 + y^2) - \frac{1}{8z_1^3} \left[\left(1 + \frac{z_1^2}{2R} - \frac{2z_1}{R} - \frac{z_1 x_1^2}{2R^3} (1 - e^2) \right) (x^2 + y^2)^2 - 4 \left(x_1 - \frac{x_1 z_1}{R} \right) x (x^2 + y^2) + 4x_1^2 x^2 + 2 \left(x_1^2 - \frac{x_1^2 z_1}{R} \right) (x^2 + y^2) - 4x_1^3 x \right] \right\}$$

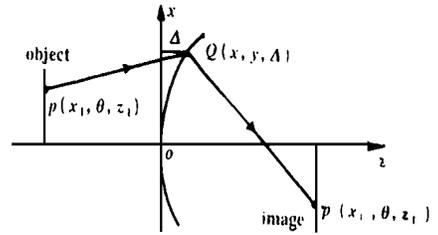


Fig. 2 Curved diffractive lens in the coordinate system

波在二次曲面上的位相分布, 所以波象差为

$$\begin{aligned}
 W(x, y, x_1) = & \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} k_1^3 \left(1 + 3C^2 + \frac{4}{R^2 k_1^2} + \frac{8}{R k_1} C - 8 \mathcal{X} (x^2 + y^2)^2 \right) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{k_1 z_1} - \frac{1}{R k_1} \right] \frac{k_1^2 x_1}{z_1} x (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} k_1 \frac{x_1^2}{z_1^2} x^2 \\
 & \left. + \frac{1}{4} k_1 \frac{x_1^2}{z_1^2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

化为和(12)式相类似的型式有

$$\begin{aligned}
 W(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1) = & \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{4} k_1^3 \left[1 + 3C^2 + \frac{4}{R^2 k_1^2} - \frac{8}{R k_1} \left(1 + \frac{2}{k_1 z_1} - 8 \mathcal{X} \right) \right] h^4 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{k_1^2 X_M h}{z_1} \left[C + \frac{1}{R k_1} h^2 \bar{x}_1 \bar{x} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{1}{2} k_1 \frac{X_M^2 h^2}{z_1^2} \bar{x}_1^2 \bar{x}^2 \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{4} k_1 \frac{X_M^2 h^2}{z_1^2} \bar{x}_1^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

与(13)式比较系数, 并令 $B = 2 / (R k_1)$ 得到

$$\left. \begin{aligned}
 S_{iv} &= (1/4) h^4 k_1^3 (1 + B^2 + 4BC + 3C^2) - 8 \mathcal{X} h^4 \\
 S_{\oplus} &= (1/2) k_1^2 h^2 J (2C + B) \\
 S_{\ominus} &= J^2 k_1 \\
 S_{\oplus} &= 0 \\
 S_{\oplus} &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ 仍为} \quad (21)$$

光阑移动后象差系数公式变为

$$\left. \begin{aligned}
 S_{iv}^* &= S_{iv} \\
 S_{\oplus}^* &= S_{\oplus} + \epsilon S_{iv} \\
 S_{\ominus}^* &= S_{\ominus} + 2\epsilon S_{\oplus} + \epsilon^2 S_{iv} \\
 S_{\oplus}^* &= S_{\oplus} = 0 \\
 S_{\oplus}^* &= S_{\oplus} + \epsilon (3S_{\ominus} + S_{\oplus}) + 3\epsilon^2 S_{\oplus} + \epsilon^3 S_{iv}
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

当光阑移动前与透镜重合, 移动后第二近轴光线与透镜交点高度为 \bar{h} , 则 $\epsilon = \bar{h}/h$ 。实际上公式(14), (21), (22)和文献[2], [3]中相应公式是完全一致的, 只是孔径角定义正负相反导致 S_{\oplus} 符号相反。

三、设计实例

对于物距, 光焦度已确定的单透镜光学系统, 公式(21)中, C 为定值, 只有 B, G 两个变量, 光阑移动后增加了可变参数 ϵ , 所以能够共计对三种象差进行校正或控制。显然 S_{iv}^*, S_{\oplus}^* 不能同时为零, 可以选择合适的 G, ϵ , 使 $S_{iv}^* = S_{\oplus}^* = 0$, 解得

$$\left. \begin{aligned}
 G &= [k_1^3 (1 - C^2)] / (32 \lambda) \\
 \epsilon &= - S_{\oplus} / S_{iv} = - (2J) / [h^2 k_1 (B + 2C)] x
 \end{aligned} \right\}$$

剩余的象差系数通过变量 B 并限制 h 加以控制

$$\left. \begin{aligned} S_{iv}^* &= S_{iv} = (1/4)h^4k_1^3(B+2C)^2 \\ S_{(h)}^* &= -(S_{\oplus}S_{\ominus})/S_{iv} = -(2J^3)/[h^2(B+2C)] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

通过(23)式中 ϵ 求出光阑位置如图 3 所示。

$$\bar{l} = 2/[k_1(B+C-1)] \quad (25)$$

上述单色象差性质使衍射单透镜很适用于激光光学系统,例如 $f-\theta$ 激光扫描镜要求准直平行光入射,在扫描角度范围内,象点光斑大小均匀,象面为焦平面,象高满足 $f-\theta$ 条件,即 $X_M = f\theta$, 其中 θ 为扫描角, f 为焦距。上述校正了慧差,象散,场曲且球差可控的系统正好满足这些条件,只要控制畸变使象高满足 $f-\theta$ 条件即可。

如图 4 所示,因平行光入射,物在无穷远处,则

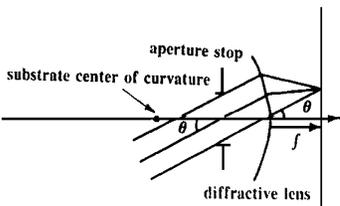


Fig. 4 Layout of the diffractive laser scan lens

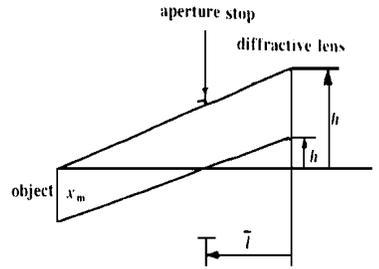


Fig. 3 Geometry of diffractive singlet system. The aperture can be moved to correct aberration

$C = -1$, 由公式(23)得 $G = 0$

为满足 $f-\theta$ 条件所应产生的畸变为

$$\epsilon_x = f\theta - f \tan \theta \quad (26)$$

设 $\bar{u} = \bar{h}/b$, \bar{h} 为第 2 近轴光线在透镜上的高度, \bar{l} 为光阑位置, 则 $\bar{u} = \tan \theta$, 代入(26)式得

$$\epsilon_x = f[\tan^{-1}\bar{u} - \bar{u}] \approx +f\bar{u}^3/3 \quad (27)$$

又因为 $\epsilon_x = -f/(2h)S_{(h)}^*$ 所以

$$S_{(h)}^* = -2h\bar{u}^3/3 = -(2J^3)/(3h^2) \quad (28)$$

(28)式与(24)式相比较得 $B = -1$, 即只要 $B = -1$, 无论 h 取何值, 都满足 $f-\theta$ 条件, 所以 h 可限制球差的大小。

由(25)式得到 $\bar{l} = -2/(3k_1) = -2f/3$ 。

所以,符合设计要求的衍射透镜,其环带半径为傍轴近似情况下的菲涅耳波带片的环带半径($G = 0$),基片弯曲的曲率半径 $R = 2/(k_1B) = -2/k_1 = -2f$, 即弯向物方,曲率半径为 2 倍焦距。光阑位于透镜前方 $2/3$ 焦距处,透镜的半径可由对球差的要求加以限制。

参 考 文 献

- 1 Stone T, George N. Appl Opt, 1992; 31(1): 38~ 43
- 2 崔庆丰. 光学学报, 1995; 15(4): 499~ 503
- 3 Buralli D, Morris G. Appl Opt, 1989; 28(18): 3950~ 3959
- 4 Wood A P. Appl Opt, 1992; 31(13): 2253~ 2258
- 5 Sweatt W C. J O S A, 1977; 67(6): 803~ 808
- 6 Kleinhans W A. Appl Opt, 1977; 16(6): 1701~ 1704
- 7 Buralli D, Morris G. Appl Opt, 1989; 28(5): 976~ 983
- 8 Buralli D, Morris G. Appl Opt, 1992; 31(1): 38~ 43

作者简介: 殷功杰,男,1966年3月出生。博士研究生。现从事衍射光学元件以及激光主动距离图象传感方面的研究工作。