

## 强激光大气传输热晕方程的积分表示\*

蔡邦维 黄文龙 吕百达 刘忠永

(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都, 610064)

**摘要:** 基于菲涅耳-基尔霍夫近似, 运用格林函数方法导出了热晕方程的积分表达式, 并以连续波(CW)稳态热晕为例进行了数值计算和讨论, 结果表明我们所采用的方法是可行的。众所周知的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分则是我们所得积分表达的一个特例。

**关键词:** 格林函数 热晕 菲涅耳-基尔霍夫近似 积分表达式

## An integral expression for thermal blooming equation of high-power laser propagation through atmosphere

Cai Banwei, Huang Wenlong, L Baida, Liu Zhongyong

(Institute of Laser Physics and Laser Chemistry, Sichuan University)

**Abstract:** On the basis of Fresnel-Kirchhoff approximation, the integral expression for the thermal blooming of high-power lasers propagating through atmosphere has been derived by Green's function method, and numerical simulations of CW steady-state thermal blooming have been performed to show the feasibility of our method. We have also shown that the well-known Fresnel-Kirchhoff diffraction integral is a limiting case of the generalized integral expression, where the refractive index is a constant.

**Key words:** Green's function thermal blooming Fresnel-Kirchhoff approximation integral expression

\* 中科院科学技术基金(NO. 94014)资助。

$$\Delta T = -0.01365 \Delta d_1 + 0.01836 \Delta d_2 - 0.01764 \Delta d_3 - 0.00214 \Delta d_4 \quad (11)$$

综合考虑各膜层的情况, 就可以粗略确定  $\Delta d_j$ 。

## 四、讨论与结论

以上的计算与分析结果表明, 给定膜系的透射光谱的厚度灵敏度因子  $S_{dj}$  对分析和判断膜系对厚度偏差的灵敏谱段、灵敏膜层, 以及确定厚度允差值具有很大作用。对优化膜系的设计和镀膜生产工艺具有一定的指导意义。

## 参 考 文 献

- 1 唐晋发, 郑 权. 应用薄膜光学, 第一版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984: 51
- 2 Macleod H A. Thin-film optical filter. London: Adam Hilger Ltd., 1969

\*

\*

\*

作者简介: 范志刚, 男, 1966年4月出生。硕士, 讲师。主要从事光学薄膜微观结构, 膜系设计及测量等方面的研究工作。

# 一、引 言

热晕是强激光在大气中传输引起的非线性效应之一, 它会造成传输光束产生畸变、扭曲、发散等光束质量变差现象。常规处理热晕问题的方法是联立求解波动方程和介质流体物理方程。一般情况下, 这个偏微分方程组无解析解, 需作繁杂的数学变换, 计算程序复杂。为了简化计算, 我们应用格林函数法, 将常规处理热晕问题的两个偏微分方程合为求解一个积分方程, 对其普适性作了讨论, 并以 CW 稳态热晕为例作了数值计算。得到与文献中用常规方法计算结果一致的结论, 证明提出的方法是可行的。而常用的处理激光束衍射问题的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分方程则是本文所得结果中折射率  $n$  为常量时的一个特例。

## 二、扰动介质赫姆霍茨方程的积分形式解

众所周知, 处理强激光在大气中传输的热晕效应的基本方程组为<sup>[1,2]</sup>

### 1. 扰动介质赫姆霍茨方程

$$\nabla^2 E + k^2 n^2 E = 0 \tag{1}$$

它是波动方程在单色波假定下的结果。式中  $\nabla^2$  是拉普拉斯算符,  $E$  是激光光场,  $k$  是波数,  $n$  是扰动介质的折射率。

$$n = n_0 + \delta n \tag{2}$$

$n_0$  是未扰动折射率,  $\delta n$  是折射率微扰量。对均匀介质  $\delta n = 0$ , (1) 式变为

$$\nabla^2 E + k^2 n_0^2 E = 0 \tag{3}$$

(3) 式是均匀介质赫姆霍茨方程, 对大气  $n_0 = 1$ 。

### 2. 流体物理方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p_0} \alpha c_s^2 \nabla^2 I \tag{4}$$

式中,  $c_s$  为声速,  $s$  为压缩比,  $\gamma$  为定压摩尔比热与定容摩尔比热之比,  $\alpha$  为吸收系数,  $I$  为激光光强。

为了简化联立求解 (1), (4) 式的数值计算程序, 我们运用格林函数方法求解扰动介质赫姆霍茨方程 (1) 式的积分表达式。

由数学物理方程, (1) 式的积分形式解为<sup>[5]</sup>

$$E(r_1) = \iint_{\Sigma} E(r_0) K(r_0, r_1) ds \tag{5}$$

式中,  $K(r_0, r_1)$  为广义传输核, (5) 式把赫姆霍茨方程和它所满足的边界条件  $\Sigma$  以及初始条件  $E(r_0)$  联系起来。

众所周知, 均匀介质赫姆霍茨方程 (3) 式的一对格林函数为<sup>[5]</sup>

$$G_0(r_0, r_1) = \pm \frac{1}{4\pi r} \exp(\pm i k n_0 r) \tag{6}$$

(6) 式是球面波表达式, 它是 (3) 式的一对特解,  $r = r_1 - r_0$ , 则

$$\nabla^2 G_0 + k^2 n_0^2 G_0 = 0 \tag{7}$$

(6) 式中指数项的物理意义是光波的位相, 设扰动介质赫姆霍茨方程 (1) 式的一对格林函数为

$$G_n(r_0, r_1) = \pm \frac{1}{4\pi} \exp[\pm ik \int_r n(r) dr] \tag{8}$$

则  $\nabla^2 G_n + k^2 n^2 G_n = 0$  (9)

Byron 已证明<sup>[6]</sup>, 对形如(1)式的偏微分方程有解

$$E(r_1) = \iint_S [E(r_0) \cdot \nabla G_n(r_0, r_1) - G_n(r_0, r_1) \cdot \nabla E(r_0)] \cdot t ds \tag{10}$$

(10) 式也称为赫姆霍茨-基尔霍夫积分定理, 式中  $S$  为封闭积分曲面,  $S = S_1 + S_2$ ,  $t$  为  $S$  的法向单位矢量,  $ds$  是积分面元, 如图 1 所示。

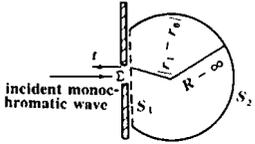


Fig. 1 Geometry used to derive the integral expression of Helmholtz equation in inhomogeneous media

当  $S_2$  面上各点满足扩展索末菲外向辐射条件<sup>[5]</sup>

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\partial E}{\partial n} - iknE = 0 \tag{11}$$

时, (10) 式化为  $E(r_1) = \iint_{S_1} [E(r_0) \cdot \nabla G_n(r_0, r_1) - G_n(r_0, r_1) \cdot \nabla E(r_0)] \cdot t ds$  (12)

运用基尔霍夫近似(基尔霍夫边界条件)<sup>[4]</sup>, 即 1. 屏的存在不影响边界  $\Sigma$  上各点的  $E$  及其法向偏导数  $\frac{\partial E}{\partial t}$  的值; 2. 在平面  $S_1$  上除  $\Sigma$  外各处的  $E$  及其法向偏导数  $\frac{\partial E}{\partial t}$  的值恒为零。则(12)式为

$$E(r) = \iint_{\Sigma} [E(r_0) \cdot \nabla G_n(r_0, r_1) - G_n(r_0, r_1) \cdot \nabla E(r_0)] \cdot t ds \tag{13}$$

对近轴入射光束,  $\nabla E$  主要由垂直于屏方向的迅速变化的位相决定<sup>[1]</sup>

$$\nabla E(r_0) = iknE(r_0) \tag{14}$$

把(8), (14)式代入(13)式, 得

$$E(r_1) = - \frac{i4\pi}{\lambda} \iint_{\Sigma} E(r_0) G_n(r_0, r_1) ds \tag{15}$$

与(5)式比较得

$$K(r_0, r_1) = \frac{i}{\lambda} \exp \pm [ik \int_r n(r) dr] \tag{16}$$

(16) 式就是我们用格林函数法所求得的扰动介质赫姆霍茨方程的广义传输核。

在菲涅耳近似下, 即  $z \gg [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2}$  (17)

考虑到对大气  $n_0 = 1$ , 把(2)式代入(16)式, 则

$$K(r_0, r_1) = \pm \frac{i}{\lambda} \exp(i k z) \exp \pm \frac{ik}{2z} ((x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2) \exp(i k \int \delta n dz) \tag{18}$$

联系(5), (18)式, 得扰动介质赫姆霍茨方程的积分形式解

$$E(r_1) = \iint_{\Sigma} E(r_0) K_L(r_0, r_1) \exp(i \Psi_B) ds \tag{19}$$

式中,  $K_L(r_0, r_1) = \frac{i}{\lambda} \exp(i k z) \exp \pm \frac{ikn_0}{2z} ((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2)$  (20)

为均匀介质赫姆霍茨方程(3)式的线性传输核。

激光技术 [jgjs@sina.com](mailto:jgjs@sina.com)  $\Psi_B = k \int \delta n dz$  (21)

为热晕介质非线性效应引起的热晕位相<sup>[2]</sup>,可从流体物理方程求得热晕位相,对不同状态的热晕可得不同的热晕位相。

由文献[1] 
$$\delta n = (n_0 - 1)s \tag{22}$$

则由(22)式得 
$$\Psi_B = kz \delta n = k(n_0 - 1)zs \tag{23}$$

(23)式成立的条件如文献[2]。

当入射光为高斯光束时 
$$I(x, y) = \frac{P}{\pi a^2} \exp - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \tag{24}$$

式中,  $P$  为激光功率,  $2a$  为高斯光束的光斑半径。由文献[1],对稳态 CW 热晕

$$s(x, y) = - \frac{(\gamma - 1)\alpha}{\gamma p_0 v_0} \int_{-\infty}^x I(x', y) dx' \tag{25}$$

式中,  $p_0$  为标准大气压强,  $v_0$  为风速。

对短脉冲热晕( $t^3$  热晕) 
$$s(x, y; t) = \frac{t^3}{6} \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{\alpha}{c_s^2} I \tag{26}$$

对长脉冲热晕( $t$  热晕) 
$$s(x, y; t) = - \frac{(\gamma - 1)\alpha t I}{\gamma p_0} \tag{27}$$

联立(23)式,(24)式,(25)式,(26)式和(27)式得

导 
$$\Psi_B^{CW} = - \frac{k(n_0 - 1)(\gamma - 1)\alpha z P}{2\pi \gamma p_0 v_0 a} \exp - \frac{y^2}{a^2} \text{erf} \frac{x}{a} + 1 \tag{28}$$

式中, erf 为误差函数。

光束 
$$I_B^3 = \frac{2k(n_0 - 1)(\gamma - 1)t^3 c_s^2 \alpha P z}{3\pi \gamma p_0 a^4} \exp - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \exp - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \tag{29}$$

$$\Psi_B^t = - \frac{k(n_0 - 1)(\gamma - 1)t \alpha P z}{\pi \gamma p_0 a^2} \exp - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \tag{30}$$

分别对应于 CW 稳态热晕位相,短脉冲热晕位相和长脉冲热晕位相。

综上所述,我们运用格林函数法,在菲涅耳-基尔霍夫近似下,求得了扰动介质赫姆霍茨方程(1)式的广义传输核(20)式,以及不同类型热晕的热晕位相(28)式,(29)式和(30)式的具体表达式。从而将求解热晕问题的偏微分方程组合为一个积分方程。

### 三、数值计算

设激光束的初始光场分布为<sup>[7]</sup>

$$E = (P/\pi a^2)^{1/2} \exp [i(kr^2/2z_F) - (r^2/2a^2)] \tag{31}$$

式中,  $z_F$  是焦距。图 2 是其三维光强分布图(a)及等强度分布图(b),数值计算中使用(19)式,且仅考虑 CW 稳态热晕,式中,  $E(r_0)$ ,  $K_L(r_0, r_1)$ ,  $\Psi_B$  如(31)式,(20)式,(28)式,所用参数分别是  $n_0 - 1 = 3.0 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\alpha = 6.5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ,  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ,  $p_0 =$

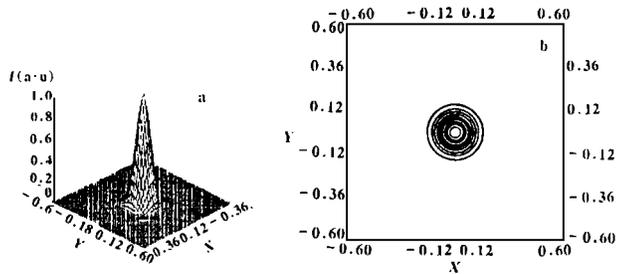


Fig. 2 Gaussian initial field distribution, (a) 3D intensity distribution, (b) isophote diagram corresponding to (a)

激光技术 igis@sina.com

$1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $a = 0$ .  
 $1\text{m}$ ,  $v_0 = 2\text{m/s}$ ,  $z_F = 10^6\text{m}$ . 计算在 486 微机上进行, 用高斯-勒让德数值积分法, 典型例示于图 3, 4, 5, (a) 为三维光强分布图, (b) 为与 (a) 对应的等强度分布图。从图中可知, 强激光在大气中传输时的热晕效应引起光束的扩束效应和中心偏移效应。

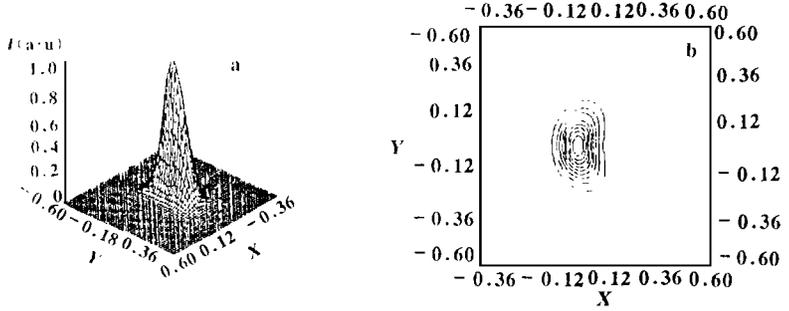


Fig. 3 (a) 3D intensity distribution where  $z = 1.5\text{km}$ ,  $P = 50\text{kW}$   
 (b) isophote diagram corresponding to (a)

随着激光功率的增强, 传输距离的增大, 光束的等强度线的月牙形分布越来越严重, 具体地, 风方向上的中心偏移加大, 与风垂直方向上的扩束加剧, 直到光束截面破裂, 与文献[7]中用常规方法所得结果相一致。

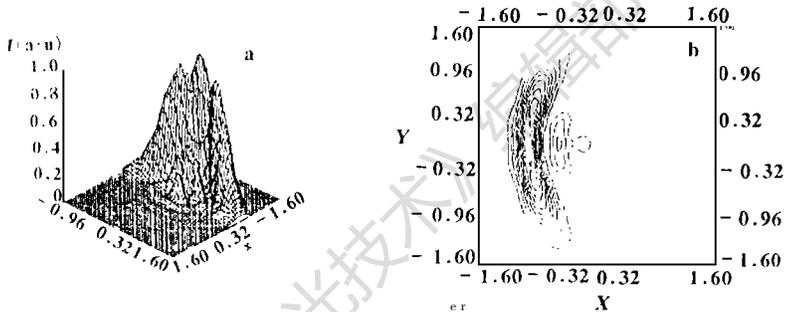


Fig. 4 (a) 3D intensity distribution where  $z = 5\text{km}$ ,  $P = 50\text{kW}$   
 (b) isophote diagram corresponding to (a)

另外从(28)式还可以看出, 风速  $v_0$ , 吸收系数  $\alpha$  对热晕效应的影响有与激光功率  $P$  相同的规律。增大  $P$  的值, 相当于增大相同倍数的  $\alpha$ , 减小相同倍数的  $v_0$ 。

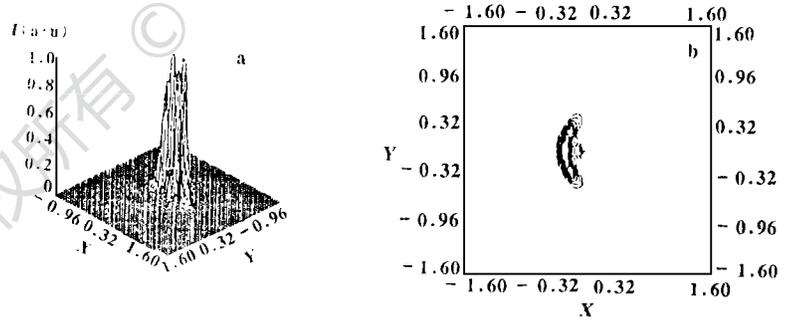


Fig. 5 (a) 3D intensity distribution where  $z = 1.5\text{km}$ ,  $P = 166\text{kW}$   
 (b) isophote diagram corresponding to (a)

#### 四、讨论

1. 在(21)式中令

$\delta n = 0$ , 即  $\Psi_B = 0$ , 得到均匀介质赫姆霍茨方程(3)式在菲涅耳-基尔霍夫近似下的积分解

$$E(r) = \iint_{\Sigma} E(r_0) K_L(r_0, r) ds \tag{32}$$

$K_L(r_0, r)$  如(20)式所示, 由于其存在一对符号相异的格林函数, 因此其积分解也为一对符号相异的积分表达式<sup>[8]</sup>, 即

$$E(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} E(r_0) \exp(i\alpha r) \exp\left\{ \frac{ik}{2z} [(x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2] \right\} dx_0 dy_0 \tag{33}$$

就是折射率  $n$  为常量的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分方程, 对大气  $n_0 = 1$ 。

2. 当考虑激光束通过  $ABCD$  复杂光学系统的热晕问题时, 则

$$E(r) = \pm \frac{i}{\lambda B} \exp(i k z) \iint_{\Sigma} E(r_0) \exp(i k [x_0^2 + y_0^2 + D(x^2 + y^2) - 2(x_0 x + y_0 y)]) \exp(i \Psi_B) dx_0 dy_0 \quad (34)$$

### 五、结 论

我们运用处理偏微分方程的格林函数法, 在菲涅耳-基尔霍夫近似下, 推导得到了扰动介质赫姆霍茨方程的广义传输核及其积分解。其解的具体表达式是一对符号相异的积分式。作为一种折射率  $n$  为常量的特例, 均匀介质赫姆霍茨方程积分解的具体表达式也是一对符号相异的积分式, 它们都能视具体情况不同来处理光束的衍射问题<sup>[8]</sup>。然而, 前者比后者更具有普适性。进一步, 运用高斯-勒让得积分法对 CW 稳态热晕的数值计算得到了用常规方法相同的结论, 证明了我们所采用的此种方法的可行性。

### 参 考 文 献

- 1 Strohbehn J W. Modern theories in the propagation of optical waves in a turbulent medium, in Laser Beam Propagation in the Atmosphere. Berlin: Spring Verlag, 1978
- 2 Gebhardt F G. SPIE, 1991; 1221: 2
- 3 Morris J R. J O S A, 1989; A6(12): 1859
- 4 Bom M, Wolf E. Principles of Optics. 5th edition. New York: Pergamon Press, 1975
- 5 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法. 第二卷. 北京: 科学出版社, 1977
- 6 Byron F W. Filler R W. Mathematics of classical and quantum physics, Vol ②. Publishing Compony London: Addison-Wesley, 1969
- 7 陈栋泉, 李有宽, 徐锡申. 强激光与粒子束, 1993; 5(2): 243
- 8 吕百达. 激光光学(第二版). 成都: 四川大学出版社, 1992

作者简介: 蔡邦维, 男, 1941 年出生。副教授。现主要从事高功率固体激光技术、激光光束传输变换、光电信号检测、光学加工等方面的研究工作。

收稿日期: 1995-06-21

## 请向邮局订阅 1997 年度《激光技术》

国内刊号: CN51- 1125/TN, 邮发代号: 62- 74