

拉盖尔-高斯光束的聚焦特性*

王喜庆

(西南交通大学应用物理系, 成都, 610031)

吕百达

(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都, 610041)

摘要: 使用 Collins 衍射积分公式, 推导出无光阑限制情况下, 聚焦拉盖尔-高斯光束的相对光强增量和焦移。对有光阑限制的拉盖尔-高斯光束作了详细的数值计算以说明其聚焦特性。

关键词: 拉盖尔-高斯光束 聚焦特性 焦移 无光阑和有光阑限制情况

Focusing properties of Laguerre-Gaussian beams *

Wang Xiqing

(Dept. of Applied Physics, Southwest Jiaotong University)

Lü Baida

(Institute of Laser Physics and Laser Chemistry, Sichuan University)

Abstract: The relative intensity excess and focal shift of focused Laguerre-Gaussian beams in the unapertured case have been derived by using Collins diffraction integral. Detailed numerical calculations have been performed to illustrate the focusing properties of apertured Laguerre-Gaussian beams.

Key words: Laguerre-Gaussian (L-G) beam focusing properties focal shift unapertured and apertured cases

一、引言

对拉盖尔-高斯(L-G)光束的传输特性已经做了许多研究^[1], 文献[2]讨论了 L-G 光束($l=0$)光阑孔径为无限大时的焦移。本文从 Collins 公式出发详细研究了 L-G 光束的聚焦特性, 包括光阑孔径为无限大时聚焦后的腰斑半径及位置, $l=0$ 时的相对焦移和相对光强增量; 光阑孔径有限时的相对焦移及轴上最大光强等, 并对数值计算的结果做了分析和讨论。

二、聚焦场的数学表达

设 L-G 光束沿 z 轴正向传输, 光束束腰位于 ($z=0$ 处) 焦距为 f 的薄透镜面上, 透镜位于半径为 a 的圆孔光阑平面内, 透镜后焦点为 F , 如图 1 所示。

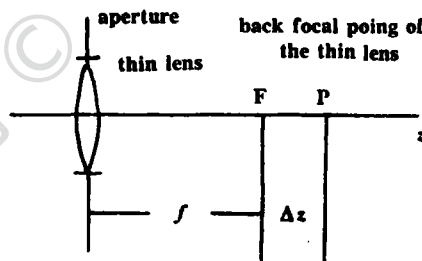


Fig. 1 Notation relating to the focusing of a Laguerre-Gaussian beam by a thin lens filling a circular aperture. The waist of the beam is located in the plane of the aperture

* 国家高技术项目资助。

由文献[1]得 $z=0$ 平面上 L-G 光束的场分布

<http://www.jgjs.net.cn>

$$E_p(r_0, \varphi_0) = \left(\sqrt{2} \frac{r_0}{\omega_0}\right)^l L_p^l \left(2 \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-\frac{ik}{2q_0} r_0^2\right) \exp(-il\varphi_0) \quad (1)$$

式中, $q_0^{-1} = -i \frac{\lambda}{\pi \omega_0^2} = \frac{2}{ik\omega_0^2}$ (2)

q_0 为与入射光束相关的基模高斯光束的复参数, λ 为激光波长, k 为波数。

任意光束通过 ABCD 傍轴光学系统的传输由广义惠更斯-菲涅耳衍射积分(即 Collins 公式)描述,柱坐标下的形式为

$$E(r, \varphi) = \frac{ik}{2\pi B} \exp(-ikz) \iint E_0(r_0, \varphi_0) \exp\left\{-\frac{ik}{2B} [Ar^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + Dr^2]\right\} r_0 dr_0 d\varphi \quad (3)$$

式中, $E(r, \varphi)$ 和 $E_0(r_0, \varphi_0)$ 分别表示出射面和入射面上的复振幅, A, B, C, D 为传输变换矩阵元

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f + \Delta z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z/f & f + \Delta z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

已知源场($z=0$ 平面)的场分布 $E_0(r_0, \varphi_0)$, 当光束通过 ABCD 光学系统后, 其观察平面($z = \text{const.}$)的场分布 $E(r, \varphi)$ 可由(3)式求得。下面分两种情况讨论。

三、光阑孔径为无限大

当光阑孔径为无限大时, 将(1)式代入(3)式直接积分得到 L-G 光束在无损耗傍轴光学系统自由传输的场分布为

$$E_{pl}(r, \varphi, z) = \exp(-ikz) \left(A + \frac{B}{q_0}\right)^{-l-p-1} \left(A - \frac{B}{q_0}\right)^p \left[A^2 - \left(\frac{B}{q_0}\right)^2\right]^{1/2} \left(\sqrt{2} \frac{r}{\omega(z)}\right)^l L_p^l \left(2 \frac{r^2}{\omega^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{ik}{2q(z)} r^2\right) \exp(-il\varphi) \quad (5)$$

式中, $q(z)$ 和 q_0 服从 ABCD 定律。 $q(z)$, q_0 和 $\omega(z)$ 是与 L-G 光束对应的基模高斯光束相应的参数。

1. 聚焦后的光束束腰位置及尺寸

入射面上的 L-G 光束复参数 $q_{or}^{-1} = -i \frac{\lambda M_r^2}{\pi \omega_{or}^2} = \frac{2M_r^2}{ik\omega_{or}^2}$ (6)

在 $z = f + \Delta z$ 出射面上的复参数为 $q_r^{-1} = \frac{1}{R_r(z)} - i \frac{\pi M_r^2}{\omega_r^2(z)}$ (7)

将(4)式及(6)式代入 ABCD 定律并与(7)式比较得

$$\frac{1}{R_r(z)} = \frac{\frac{\Delta z}{f^2} + \frac{\pi^2 \omega_{or}^4}{\lambda^2 M_r^4} (f + \Delta z)}{\left(\frac{\Delta z}{f}\right)^2 + (f + \Delta z)^2 \frac{\pi^2 \omega_{or}^4}{\lambda^2 M_r^4}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\omega_r^2(z)} = \frac{1/\omega_{or}^2}{\left(\frac{\Delta z}{f}\right)^2 + (f + \Delta z)^2 \frac{\pi^2 \omega_{or}^4}{\lambda^2 M_r^4}} \quad (9)$$

令 $R_r(z) = \infty$, 即 $1/[R_r(z)] = 0$, 由(8)式得光束束腰位置

$$\frac{\Delta z}{f} = -\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \omega_{or}^4}{f^2 \lambda^2 M_r^4}} \quad (10)$$

定义 $N_l = \omega_{or}^2/(\lambda f)$, 表示 L-G 光束的非涅耳数, 则(10)式变为

$$\frac{\Delta z}{f} = -\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 N_l^2}{M_r^4}} = -\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 N_l^2}{(2p + l + 1)^2}} \quad (11)$$

根据光束束腰的定义, 将(11)式代入(9)式, 得聚焦后的 L-G 光束的束腰半径 W_{or}

$$W_{or} = \omega_{or} / \sqrt{1 + \frac{\pi^2 N_l^2}{(2p + l + 1)^2}} \quad (12)$$

由 L-G 光束束腰半径 ω_{or} 与基模高斯光束束腰半径 ω_0 的关系, 则(10)式可写为

$$\Delta z/f = -\frac{1}{1 + \pi^2 N_G^2} \quad (13)$$

式中, $N_G = \omega_0^2/(\lambda f)$, 为基模高斯光束的非涅耳数。

由(13)式可以看出: 聚焦后 L-G 光束束腰位置与拉盖尔函数的 p, l 无关, 也就是说当光阑孔径为无限大时, 各种模式 TEM_{pl} 均聚焦于同一个平面上。但由(12)式知, 聚焦后的光束束腰半径与 p, l 有关, 且为入射的束腰半径 ω_{or} 的 $1/\sqrt{1 + \frac{\pi^2 N_l^2}{(2p + l + 1)^2}}$ 。

2. L-G 光束的相对焦移和相对光强增量

在(5)式中, 令 $r=0$ 得到轴上的场分布函数

$$E_{pl}(z) = \begin{cases} 0 & l \neq 0 \\ \exp(-ikz) \left(A + \frac{B}{q_0}\right)^{-p-1} \left(A - \frac{B}{q_0}\right)^p L_p^0(0) & l = 0 \end{cases} \quad (14)$$

由于 $l \neq 0$ 时 $E_{pl}(z) = 0$, 则轴上光强恒为零, 所以讨论轴上光强极大点位置分布无意义。下面仅分析 $l=0$ 的情况。

$$\text{当 } l=0 \text{ 时 } E_{pl}(z) = \exp(-ikz) \left(A + \frac{B}{q_0}\right)^{-p-1} \left(A - \frac{B}{q_0}\right)^p \quad (15)$$

$$\text{轴上光强 } I = E_{pl} \cdot E_{pl}^* \quad (16)$$

将(15)式、(4)式和(2)式代入(16)式整理得

$$I = \frac{1}{\left(\frac{\Delta z}{f}\right)^2 + \left(1 + \frac{\Delta z}{f}\right)^2} \frac{1}{\pi^2 N_G^2} \quad (17)$$

令 $dI/d\left(\frac{\Delta z}{f}\right) = 0$, 由(17)式求得 $\Delta z/f$, 且 $\Delta z/f$ 使(17)式有最大值, 此时 $\Delta z/f$ 即为相对焦移 $\Delta f/f$ 。

$$\Delta f/f = -\frac{1}{1 + \pi^2 N_G^2} \quad (18)$$

利用 N_G 与 N_l 的关系, (18)式可写为

版权所有 © 《激光技术》编辑部

$$\Delta f/f = - \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 N_l^2}{(2p+1)^2}} \quad (19)$$

由相对光强增量的定义 $\Delta I/I_0 = (I_{\max} - I_0)/I_0$, 得

$$\Delta I/I_0 = \frac{1}{\pi^2 N_G^2} \quad (20)$$

式中, $I_0 = \pi^2 N_G^2$ 为几何焦点处的光强。

由(18)式和(20)式可以看出相对焦移和相对光强增量均与 p 无关, 其相对焦移与基模高斯光束的相对焦移相同^[3], 也就是说对各种 TEM_{p0} 模及基模高斯光束在光阑孔径为无限大的情况下, 聚焦后轴上最大光强点位于同一点。(19)式与文献[2]给出的结果相同, 但本文从 Collins 公式出发可简单得出这一结果。

四、光阑孔径有限时

设光阑为半径 a 的圆孔, 将(1), (2)式代入(3)式, 积分之得

$$E_{pl}(r, \varphi, z) = \frac{k}{B} \exp(-ikz) i^{l+1} e^{-i\varphi} \exp\left(-\frac{ikp}{2B} r^2\right) \int_0^a \left(\sqrt{2} \frac{r_0}{\omega_0}\right)^l L_p^l\left(2 \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) J_l\left(\frac{kr_0 r}{B}\right) \exp\left(-\frac{ikA}{2B} r_0^2 - \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) r_0 dr_0 \quad (21)$$

式中, J_l 为 l 阶 Bessel 函数。

令 $r=0$ 时, 由(21)式得轴上场分布

$$E_{pl}(r=0, \varphi, z) = \begin{cases} 0 & l \neq 0 \\ \frac{ik}{B} \exp(-ikz) \int_0^a L_p^0\left(2 \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-\frac{ikA}{2B} r_0^2 - \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) r_0 dr_0 & l = 0 \end{cases} \quad (22)$$

当 $l \neq 0$ 时, 由(22)式, 轴上光强恒为零。

当 $l=0$ 时,

$$E = \frac{ik}{B} \exp(-ikz) \int_0^a L_p^0\left(2 \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-\frac{ikA}{2B} r_0^2 - \frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) r_0 dr_0 \quad (23)$$

将(4)式代入(23)式整理得

$$E = \frac{i\pi N_G f}{2(f + \Delta z)} \exp[-ik(f + \Delta z)] \int_0^{2a} L_p^0(x) \exp\left[\frac{i\pi \Delta z N_G}{2(f + \Delta z)} x - \frac{1}{2} x\right] dx \quad (24)$$

式中, $\alpha = a^2/\omega_0^2$ 定义为截断参数, $x = (2r_0^2)/\omega_0^2$ 。

令 $u = \frac{\Delta z \pi N_G}{f + \Delta z}$, 并令 $\beta = \frac{1}{2}(1 - ui)$, 代入(24)式整理得

$$E = \frac{i}{2} (\pi N_G - u) \exp\left(-\frac{ik\pi N_G f}{2(f + \Delta z)}\right) \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{k!} \frac{1}{\beta^{k+1}} \gamma(k+1, 2\alpha\beta) \quad (25)$$

式中, $\gamma(k+1, 2\alpha\beta)$ 为不完全伽马函数。

$$\text{令 } F(p, \alpha) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{k!} \frac{1}{\beta^{k+1}} \gamma(k+1, 2\alpha\beta) \quad (26)$$

将(26)式代入(25)式得

$$E = \frac{i}{2}(\pi N_G - u) \exp\left(-\frac{ik\pi N_G f}{\pi N_G - u}\right) F(p, \alpha) \quad (27)$$

轴上光强 $I = E \cdot E^* = \frac{1}{4}(\pi N_G - u)^2 F(p, \alpha) \cdot F^*(p, \alpha) \quad (28)$

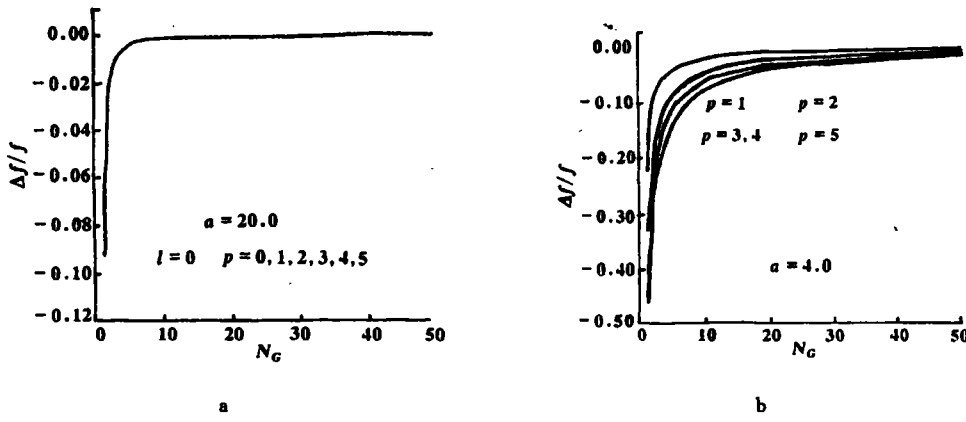


Fig.2 The relative focal shift $\Delta f/f$ as a function of the Fresnel number N_G

在给定 p, N_G 和 α 的情况下,由(28)式可算出轴上点的光强,轴上光强最大值 I_{max} 所对应的 $\Delta z/f$ 即为相对焦移 $\Delta f/f$ 。由(28)式我们在 AST 386 上用级数求和法算出了截断参数 $\alpha = 4.0$ 和 $20.0, p = 1, 2, 3, 4$ 和 5 时的 $N_G \sim \Delta f/f$ 曲线,如图 2a, b; $N_G = 5.0, p = 1, 2, 3, 4$ 和 5 时的 $\alpha \sim \Delta f/f$ 曲线,如图 3a, b 及 $\alpha \sim I_{max}(I_0)$ 曲线,如图 4a, b。

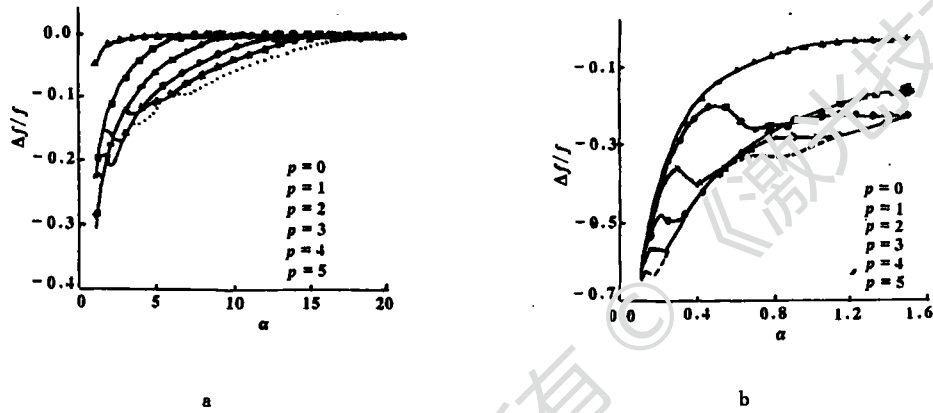


Fig.3 The relative focal shift $\Delta f/f$ as a function of the truncation parameter $\alpha, N_G = 5.0$

由图 2a 可以看出:当 $\alpha = 20.0$ 时,对 $p = 1, 2, 3, 4$ 和 5 的 L-G 光束及基模高斯光束 ($p = 0$) 其 $N_G \sim \Delta f/f$ 曲线是一条曲线,这是因为当 $\alpha = 20.0$ 时已相当于光阑孔径为无限大的情况,这与前面光阑孔径为无限大时所得到的结论是一致的。

由图 2a, b 可以看出,这时相对焦移 $|\Delta f/f|$ 随 N_G 增加是单调减小的,相对焦移是 N_G 和 α 的函数。

图 3 显示出 $\Delta f/f$ 随 α 的变化是非单调的,就所计算的而言,当 $p = i$ 时, $|\Delta f/f|$ 有 i 个

极小值,这是因为 $p=i$ 时入射面的场在 r 方向上有 i 个节环所致,且极小值点就在入射面的暗环中心。对于 $\Delta f/f$ 与 p 的关系由图2、图3可以看出:若 $p_2 > p_1$, 则有 $|\Delta f/f| \geq |\Delta f/f|$ 。另外,由图2a可以看出:相当于截断参数为无限大(光阑孔径为无限大)的截断参数与 p 有关。

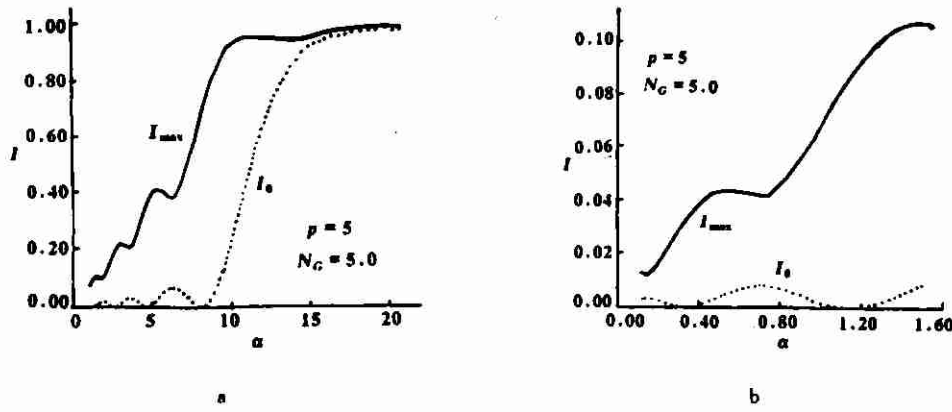


Fig. 4 The maximum intensity I_{max} along the z -axis and the intensity I_0 at the geometric focal point as a function of the truncation parameter α , $N_G=5.0$, $p=5$

图4所示为 $p=5, N_G=5.0$ 时, $\alpha \sim I_{max}$ 和 $\alpha \sim I_0$ 关系曲线。由图可以看出 $p=5$ 时, I_0 有5个零点, $p=i$ (我们计算了 $i=1, 2, 3, 4$ 和 5 的情况, 图中仅给出了 $p=5$ 的图) 时有 i 个零点。这是因为 $p=i$ 时, 入射场面上有 i 个节环且相邻节环间振幅恰好相反(拉盖尔多项式所决定的)所致。而对 $\alpha \sim I_{max}$ 曲线, $p=i$ 时 I_{max} 有 i 个极小值(不为零), 且不在 I_0 为零的位置上。所以, 对于有截断情况下的 L-G 光束聚焦后谈相对光强或相对光强增量就失去了意义。

五、小 结

本文运用 Collins 公式推导出了光阑孔径为无限大时, 聚焦的 L-G 光束的腰斑半径及位置, 相对焦移及相对光强增量, 且对不同模的 L-G 光束其值相同, 对光阑孔径有限的情况进行了数值计算, 计算结果表明, 在 α 一定的情况下, $\Delta f/f$ 与 N_G 呈单调变化。由于 L-G 光束振幅的特性, 使得 $\Delta f/f$ 和 I_{max} 与 α 呈非单调关系, 且 I_0 随 α 的变化有零点, 这是与 TEM₀₀ 模情况有显著区别的。

参 考 文 献

- 1 吕百达. 激光光学, 第二版. 成都: 四川大学出版社, 1992
- 2 Carter W H, Aburdence M F. J O S A, 1987; A4(10): 1942-1952
- 3 Li Y, Wolf E. Opt. Commun, 1982; 42(3): 151-155



作者简介: 王喜庆, 男, 1959年出生。硕士, 工程师。从事光传输变换等研究。

收稿日期: 1995-05-25