磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光的自发辐射与受激辐射

祝家清 文双春
(华中师范大学物理系,武汉,430070) (中南工业大学热物系,长沙,410083)

摘要: 本文讨论了磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光中的能量损失和能量离散以及它们相应的意义。分析、计算了自发辐射和受激辐射。结果说明:自发辐射正比于电子能量离散;光功率增益正比于平均电子能量损失。

关键词: 自由电子激光 摆动器 辐射 能量损失 能量离散

Spontaneous and stimulated emission in free-electron laser with magnetostatic field independent of z axis

Zhu Jiaqing
(Department of Physics, Central China Normal University)
Wen Shuangchun
(Department of Physics and Heat, Middle South Institute of Technology)

Abstract: Considering study of the energy loss, energy spread and their corresponding significance of a free-electron laser with magnetostatic field independent of z axis, the relationship of energy spread and spontaneous emission is derived. The results show that the spontaneous emission is proportional to electron energy spread, and the optical power gain is proportional to average electron energy loss.

Key words: free-electron laser wiggler emission energy loss energy spread

一、引 言

自从麦蒂(J.M.J.Madey)著文"周期磁场中的受激韧致辐射"发表以来[1],自由电子激光理论及其实验相继得到迅速地发展。从目前以电子横向振动为基础的自由电子激光来看,有喇曼型和康普顿型自由电子激光[2],这两者都需要交变的周期性磁场装置,这就是波动器。按照波动器磁铁分类,可分为电磁波动器和永磁波动器,它们在自由电子激光中都作为泵源。1991年,S.Pinhas提出了一种特殊的摆动器[3],其中的磁场是由电流密度激发的。这种磁场与 z 轴无关,然而电子在该磁场中的运动轨迹却呈现波动形式。以基波为基础,电子在这种特殊摆动器中(磁场与 z 轴无关)具有产生自由电子激光的可能性[4]。这篇文章主要讨论这种特殊摆动器自由电子激光中自发辐射和受激辐射的机制,这种关系是研究自由电子激光的一个基本机理问题。1979年,麦蒂利用量子理论推导了自发辐射与受激辐射的关系。后来,被人们称之为麦蒂定理[5],并由如下公式表示:

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{m^2c\omega^2}{8\pi^2\varepsilon_0E_0^2}\langle(\gamma_f-\gamma_0)^2\rangle \tag{1}$$

$$\langle \gamma_f - \gamma_0 \rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma_0}\langle (\gamma_f - \gamma_0)^2 \rangle \tag{2}$$

式中，m 是电子质量，c 是光在真空中的速度，E_0 是电磁波电场分量的幅值，ω 是光辐射频率，γ_0 和 γ_f 分别表示电子在相互作用区域入端和出端的相对论能量因子，$\langle\ \rangle$ 表示对电子所处的相位求平均，$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega}$ 表示单位频率间隔、单位立体角的辐射强度。

值得指出，麦蒂定理受到人们的高度重视，实验证明，在低增益、未饱和电子-光子相互作用以及在平面波的假设条件下，该定理是成立的[6]。

麦蒂定理是在静磁周期场自由电子激光的情形下导出的。由于磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光与静磁周期场自由电子激光一样，也应该具有相应的自发辐射谱分布。因此，麦蒂定理对于这种特殊结构磁场的自由电子激光也应有相应关系。本文就是研究磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光中的自发辐射、受激辐射以及它们的关系。

二、自 发 辐 射

电子在磁场与 z 轴无关摆动器中的运动速度和轨迹为[3]

$$v_x = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) \tag{3}$$

$$v_z = v_{/\!/} + \frac{\omega_0{}^2 x_0{}^2 \cos(2\omega_0 t)}{4 v_{/\!/}} \tag{4}$$

和

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) \tag{5}$$

$$z = v_{/\!/}\, t + \frac{\omega_0{}^2 x_0{}^2 \sin(2\omega_0 t)}{8 v_{/\!/}} \tag{6}$$

我们把这个结果跟普通自由电子激光中电子的速度和轨迹[7]进行比较，发现它们是一样的，只是参数 ω_0 和 a_w 的表达式不同。磁场与 z 轴无关摆动器中，定义

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e v_{/\!/} G}{m\gamma c}} \tag{7}$$

$$a_w = \sqrt{\frac{eKR\gamma}{2mc^3}} \tag{8}$$

而

$$\left(\frac{v_x}{v_{/\!/}}\right)_{\mathrm{rms}} = \frac{\omega_0 x_0}{\sqrt{2}\, v_{/\!/}} = \frac{a_w}{\gamma} \tag{9}$$

式中，$v_{/\!/}$ 是平均轴速度，x_0 表示时间为零时的电子位置，m 是电子的静止质量，G，K 和 R 是由电流密度所决定磁场的基本常数。

为了计算电子在磁场与 z 轴无关摆动器中的能量损失，我们从电子与电磁波相互作用的能量关系来进行分析，即

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta}\cdot\vec{E} \tag{10}$$

在$(0, t)$上积分上式，则得

$$\gamma_{(t)} = \gamma_{(0)} - \frac{e}{mc}\int_0^t \vec{\beta}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

式中，γ_0 表示电子开始进入相互作用区域时的初始能量，于是上式可写为

$$\gamma_f - \gamma_0 = -\frac{e}{mc}\int_0^t \vec{\beta}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

上式左边表示电子终、初能量之差，即电子能量损失。由于电子进入相互作用区域时，其相位是分散的，因此，为了要求出电子与波的净能量交换，需将上式对相位求平均，即

$$\langle \gamma_f - \gamma_0 \rangle = -\frac{e}{mc}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Phi\left[\int_0^t \vec{\beta}\cdot\vec{E}\mathrm{d}t\right] \tag{13}$$

式中，$\langle \gamma_f - \gamma_0 \rangle$ 就是电子进入相互作用区域相位平均的净能量交换。

由(12)式，我们还可以求得电子与波相互作用的能量均方值，即平方平均值，

$$\langle(\gamma_f - \gamma_0)^2\rangle = \left(\frac{e}{mc}\right)^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Phi\left[\int_0^t \vec{\beta}\cdot\vec{E}\mathrm{d}t\right]^2 \tag{14}$$

式中，$\langle(\gamma_f - \gamma_0)^2\rangle$ 表示相位平均的能量离散。因为电子进入相互作用区域时的初相位是分散的，所以，电子从相互作用区域射出时，必然存在能量离散。

在光场不太强的情况下，可将 γ 展开成 E_0 的第一级，即

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots \tag{15}$$

其一阶扰动量为

$$\gamma_1 = -\frac{e}{mc^2}\int_0^t \vec{v}^0\cdot\vec{E}\mathrm{d}t \tag{16}$$

式中，$\vec{v}^0$ 是电子未受电磁波扰动时的速度。

由于 γ_0 与 E 成线性关系，则对 Φ 求平均为

$$\langle(\gamma_f - \gamma_0)^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots)^2\mathrm{d}\Phi = \langle {\gamma_1}^2\rangle \tag{17}$$

在磁场与 z 轴无关摆动器中，其磁场是

$$\vec{B}_m = -\hat{y}px \tag{18}$$

而线极化电磁波的电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 分别为

$$\vec{E} = \hat{x}E_0\cos(k_s z - \omega_s t + \Phi) \tag{19}$$

$$\vec{B} = \hat{y}E_0\cos(k_s z - \omega_s t + \Phi) \tag{20}$$

式中，k_s 表示波数，而频率 $\omega_s = k_s c$，E_0 为电磁波的幅值，相位 Φ 为恒量。

在磁场与 z 轴无关的摆动器中，由于电子只在 x-z 平面内运动，因此，$\beta_y = 0$。这样，电子与电磁波相互作用的能量关系(16)式可写成

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{eE_0}{mc^2}\cos(k_s z - \omega_s t + \Phi)\cdot v_x \tag{21}$$

将(3)式代入上式，则得

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2}[\sin(k_s z - \omega_s t - \omega_0 t + \Phi) + \sin(k_s z - \omega_s t - \omega_0 t + \Phi)] \tag{22}$$

将(22)式对时间积分可得

$$\gamma_1 = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2}\left\{\frac{\cos[(k_s z + \Phi) - \Delta\omega t]}{\Delta\omega} + \frac{\cos[(k_s z + \Phi) - (\Delta\omega + 2\omega_0)t]}{\Delta\omega + 2\omega_0} - \frac{\cos(k_s z + \Phi)}{\Delta\omega} - \frac{\cos(k_s z + \Phi)}{\Delta\omega + 2\omega_0}\right\} \tag{23}$$

式中，$\Delta\omega = \omega_s - \omega_0$。若只保留(23)式中的共振项，即与 $\Delta\omega^{-1}$ 成正比的项，而略去其他的非共振项；并令 $\varphi = -k_s z - \Phi$，则(23)式可写成

$$\gamma_1 = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2}\left\{\frac{\cos(\varphi+\Delta\omega t)}{\Delta\omega} - \frac{\cos\varphi}{\Delta\omega}\right\} \tag{24}$$

将上式进行代换，即令 $\theta = \pi/2 - \varphi$，则上式变为

$$\gamma_1 = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2}\cdot\frac{\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta}{\Delta\omega} \tag{25}$$

将上式平方，并对相位求平均，考虑到 $t = L/v_{/\!/}$，则有

$$\langle{\gamma_1}^2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2}\right)^2\cdot\frac{L^2}{{v_{/\!/}}^2}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2 \tag{26}$$

式中，$\eta = \dfrac{\Delta\omega L}{v_{/\!/}}$，其中 L 是相互作用长度，$v_{/\!/}$是平均轴速度。

由(1)式，并考虑到(9)式和(17)式，我们可以得到磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光的自发谱分布：

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2{E_0}^2L^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{a_w}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2 \tag{27}$$

由此可见，在磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光中，单位频率、单位立体角的自发辐射功率密度正比于电子能量的均方值。

三、受 激 辐 射

上面的讨论，对于光场的第一级，只能引起电子聚束，而无任何平均能量交换。由于电子与电磁波的净能量交换呈现在光场的第二级，因此，为了计算受激发射和增益，必须找出由于光场产生的电子能量的第二级扰动 γ_2。

现将 γ 展开成 E_0 的第二级，即

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \tag{28}$$

因为 γ_1 与 E_0 成线性关系，因此它对 Φ 的平均为零，于是有

$$\langle\gamma_f - \gamma_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\cdots)\mathrm{d}\Phi \simeq \langle\gamma_2\rangle \tag{29}$$

按照能量守恒原理，假定电子束的能量损失是用来增加辐射密度，因此，体积为 V，电子束截面的增益可理解为该体积中辐射能量的增加，即

$$G = -\frac{\langle\gamma_2\rangle mc^2 n_e V}{\varepsilon_0|E_0|^2 V} \tag{30}$$

式中，n_e 是电子密度，$\varepsilon_0|E_0|^2$ 是散射能量密度，V 是束体积，ε_0 是真空中的介电常数。

根据(2)式，我们可以利用$\langle{\gamma_1}^2\rangle$的值求出$\langle\gamma_2\rangle$，即

$$\langle\gamma_2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{eE_0La_w}{2mc^2\gamma}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(\Delta\omega t) \tag{31}$$

现在，求$\langle\gamma_2\rangle$归结为求出上式的$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(\Delta\omega t)$，利用 $t = \dfrac{L}{v_{/\!/}}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(\Delta\omega t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\left[\frac{\Delta\omega L}{v_{/\!/}}\right] = -\frac{(\Delta\omega)L}{{v_{/\!/}}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}(v_{/\!/}) \tag{32}$$

由(9)式可得

$$\frac{\mathrm{d}v_{/\!/}}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\omega_0 x_0}{\sqrt{2}a_w} \tag{33}$$

将(33)式代入(32)式，然后将结果再代入(31)式，可以得到，

$$\langle\gamma_2\rangle = -\frac{1}{2}\left(\frac{eE_0La_w}{2mc^2\gamma}\right)^2 \cdot \frac{2L(\Delta\omega)a_w}{\sqrt{2}\omega_0 x_0\gamma^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2 \tag{34}$$

最后，将(34)式代入(30)式，可得磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光的增益：

$$G = \frac{e^2 a_w^{\ 3}(\Delta\omega)L^3 n_e}{4\sqrt{2}mc^2\omega_0 x_0\gamma^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2 \tag{35}$$

由此可见，增益与相互作用长度有关。上式表明，在完全谐振时，即当 $\Delta\omega=0$ 时，在任何时刻都没有增益。

四、结　　论

在磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光中，自发辐射与受激辐射也存在相应的关系。我们还看到，诱发能量离散 $\langle(\gamma_f-\gamma_0)^2\rangle$ 比平均能量损失 $\langle\gamma_f-\gamma_0\rangle$ 大得多。平均能量损失 $\langle\gamma_2\rangle$ 正比于光功率增益，而平均能量离散 $\langle\gamma_1^{\ 2}\rangle$ 则正比于自发辐射。

从以上的分析和计算中，我们发现一个重要因子 $\sin\eta/\eta$，它有重要的物理意义。这个因子把磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光的受激辐射和自发辐射联系起来了，这从物理上是容易理解的。由于自由电子的受激辐射是以自发辐射为基础的，因此，当非相干的自发辐射转化为相干的受激辐射时，必然保持着自发辐射的某些特性。

在磁场与 z 轴无关摆动器自由电子激光中，在谐振条件下，即 $\Delta\omega=0$，电子与波将无净能量交换，即没有增益。这个结论与普通自由电子激光是相符合的。

参 考 文 献

1 Madey J M J. J A P, 1971;42(5):1906～1913
2 祝家清．自由电子激光引论．武汉：湖北教育出版社，1994;240
3 Pinhas S. IEEE J Q E, 1990;QE-26(8):1332～1334
4 Pinhas S. IEEE J Q E, 1992;QE-28(11):2567～2572
5 Madey J M J. Nuovo Cimento, 1979;50B(1):64～68
6 Deacon D A G, Robinson K E, Madey J M J *et al*. Opt Commun, 1982;40(5):373～378
7 Marshall T C. Free electron laser. New York: Macmillan Publishing Company, 2.1～2.2

*　　*　　*

作者简介：祝家清(附照片)，男，1939 年 4 月出生。副教授。现从事自由电子激光研究及教学工作。

文双春，男，1969 年 8 月出生。研究生。现从事教学和研究工作。

收稿日期：1994-10-25

·产品简讯·

在线光纤传感器

励磁便携式测试仪用来识别在线的和未用的光纤。加拿大魁北克省 Vanire 的 Exfo 电光工程公司生产的 LED-100 型万能在线光纤传感器既可显示纤芯功率电平，又可显示光纤中光的方向。可靠的大弯曲度方法避免了光纤损伤或线路不通。光纤头可适用于 250mm 有涂层的光纤，900mm 密封的阻尼光纤，或者 3mm 有护套的试验跨接线，或连接电缆。250mm 的测试也能用 12-光纤带状电缆。可进行绝对功率测量，分辨率 ± 2dBm，相对功率测量分辨率为 0.1dB。

张贤义，巩马理　　供稿