

CO₂激光器方型腔模式的有限元法分析初探

李家镛 程愿应 孙奕

(华中理工大学激光加工国家工程研究中心, 武汉, 430074)

摘要: 本文提出了一种分析激光光腔的新方法——有限元法。对 CO₂ 激光器光腔模式进行了初步分析计算, 并与福克斯和厉鼎毅的数值算法及矩阵联乘法进行了比较。

关键词: 气体激光器 谐振腔 有限元法

Mode analysis on square-resonator of CO₂ laser by means of finite element method

Li Jiarong, Cheng Yuanying, Sun Yi

(National Engineering Research Center for Laser Processing, HUST)

Abstract: An new way to analyse the laser resonator-Finite Element Method (FEM) is presented. The mode of CO₂ continuous wave laser resonator is calculated by FEM and compared with Fox-Li numerical method and matrix multiplying method.

Key words: gas lasers resonator finite element method

一、引言

气体激光器在工业应用与经济发展中具有重要的意义。在许多应用中不仅要求激光器具高功率, 还要求激光光束具有尽可能小的发散角。因此, 光腔的模式分析, 对光腔参数设计具有重要意义。

传统的光腔模式分析有多次积分迭代法, 解析法^[1]。多次迭代积分的数值分析方法, 即使对于无源腔, 也只能计算低阶模的光场分布。模式阶次越高, 所需迭代次数越多, 对于高阶模不仅迭代次数大到难以接受, 而且有时得不到收敛的数值结果。解析法虽然直观, 但只能对某些特殊的开腔进行分析^[2], 而难以适用于实际工程中复杂多变的边界条件和初始条件。

本文提出并介绍一种可以考虑介质损耗与输出耦合率的有源开腔的光场分布模式分析的数值分析方法: 边界有限元法。

二、光腔模式的有限元法理论分析

1. 开腔衍射积分方程的建立

开腔模式分析的理论基础是非涅尔-基尔霍夫积分^[3]:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{ik}{4\pi} \iint_S u_1(x_1, y_1) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta) ds' \quad (1)$$

其中空间任一曲面 S 上光波场的振幅与相位分布函数为 $u_1(x_1, y_1)$, 所要考察点 P 处的场, 为 $u_2(x_2, y_2)$, ρ 为源点 (x_1, y_1) 与观察点 (x_2, y_2) 之间连线的长度, θ 为 S 面上点 (x_1, y_1) 处

的法线 π 与上述连线之间的夹角; ds 为 S 面上点 (x_1, y_1) 处的面积元, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波矢的模。将前述积分公式应用到开腔的两个镜面上的场, 则有

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{S_1} u_1(x_1, y_1) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta) ds' \quad (2)$$

式中, $u_1(x_1, y_1)$ 为镜 I 上的场分布, $u_2(x_2, y_2)$ 为由 u_1 经腔内一次渡越后在镜 II 上生成的场。

设 $K(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta)$ 为积分方程的核。

$$\text{则} \quad u_2(x_2, y_2) = \iint_{S_1} u_1(x_1, y_1) K(x_1, y_1, x_2, y_2) dS_1 \quad (3)$$

2. 用边界有限元法进行光学谐振腔模式分析

首先把输出镜 S 平面分割成有限多的 n 个面积微元 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, 令第 i 个面积微元上的光场可以用该微元 ΔS_i 上的 k 个固定点值来进行拟合。这些值称为该微元上的节点, 为简单直观起见以常数元为例, 引入衍射积分方程的边界有限元解法^[4]。

对于常数元, 在 S_1 的第 i 个面积元上的 u_i 为常数, S_2 上第 j 个面积元上的光场可以表示为 S_1 面上的微元对其贡献的叠加。

$$\begin{aligned} u_j'(x_2, y_2) &= \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} u_i(x_1, y_1) k(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 \\ &= \sum_{i=1}^n u_i(x_1, y_1) \iint_{\Delta S_i} k(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{令} \quad g_{ij} = \iint_{\Delta S_i} k(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 \quad (5)$$

$$\text{则} \quad u_j' = \sum_{i=1}^n u_i \cdot g_{ij} \quad (6)$$

则 S_2 上的光场可以用以下矩阵来表示:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{简化为} \quad U' = G'U \quad (8)$$

同样的, 当光场从 S_2 渡越到 S_1 时也存在着一个表征光场变换的矩阵 G'' 。

经过 $S_1 \rightarrow S_2, S_2 \rightarrow S_1$ 的往复渡越, 在 S_1 重新生成光场 u'' ,

$$U'' = G'' \cdot G'U = GU \quad (9)$$

这里 $G = G'' \cdot G'$ 称之为刚度矩阵(光学传输矩阵)。

当光场在光腔中渡越足够多次时, 光场模式将出现自再现。

$$U'' = \rho U \quad (10)$$

将 $U'' = \lambda U$ 代入 $U'' = GU$, 则有:

$$GU = \rho U \quad (11)$$

这样,我们就把激光器开腔模式分析的问题转化为光学传输矩阵 G 的特征值和特征向量的问题了。

复常数(特征值) p 的模量度自再现模的单程损耗,它的辐角量度自再现模的单程相移,从而也决定模的谐振频率。

在实际输出中,往往只有最大的一,二个 $|p|$ 对应的模式起振。我们在下面的讨论中只画出最大 $|p|$ 对应的模式图。

我们通过改变镜尺寸和腔长对方型平平腔的模式输出特性进行了初步分析计算。

附图表示平平腔的光场与相位分布,各图对应的计算条件见附表。

从附图可知,当腔长不变为 $z = 3m$, 镜尺寸 a 分别等于 30mm, 40mm 和 60mm 时,输出模式分别为 TEM_{00} , TEM_{11} 和 TEM_{22} 模。在腔长不变的情况下,随着镜尺寸的增加,输出模式阶数变大,模式特性变差。而当镜尺寸不变 $a = 30mm$ 时,腔

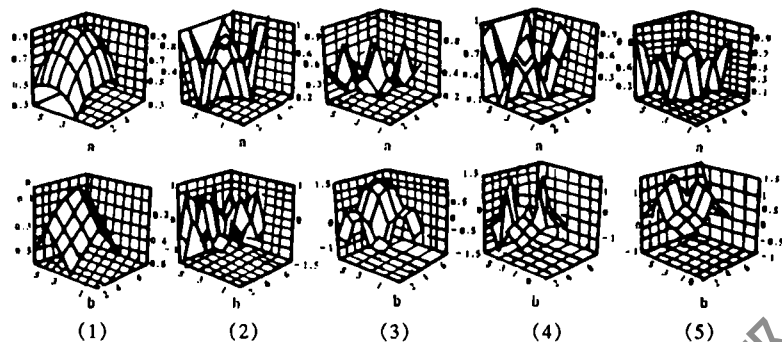


Fig. The wave amplitude distribution and phase distribution in plane-plane resonator

Table

mirror diameter(a)(mm)	30	40	60	30	30
resonator length(z)(m)	3	3	3	2	1
	Fig. (1)	Fig. (2)	Fig. (3)	Fig. (4)	Fig. (5)

长分别等于 3m, 2m 和 1m 时,输出模式分别为 TEM_{00} 模, TEM_{11} 模, TEM_{22} 模,即在镜尺寸不变的情况下,随着腔长的减小,输出模式阶数变大,模式特性变差。

由上可知,当满足条件 $a^2/L\lambda \ll (L/a)^2$ 时,唯一重要的参数是腔的非涅耳数 $N = a^2/L\lambda$,镜面上振幅分布和规律就由 N 来决定。 N 越小,衍射损耗将越大,选模特性也就越好。

与振幅分布的特点类似,相位分布的特点也不由镜的尺寸和腔长决定,而是与非涅耳数有关。

3. 边界有限元法与其它计算方案的比较

用边界有限元法与福克斯和历鼎毅的数值计算法比较,二者光场分布得到较好的吻合。

用边界有限元法与矩阵联乘 300 次结果进行比较,得到了比较好的吻合。

参 考 文 献

- 1 Bulyshev A E, Vedernikov G A, Probrzhenski N G. Soviet J Q E, 1980;10(5):623-625
- 2 Yelden E F, Seguin H J J, Capjack C E et al. A P L, 1991;58(7):693-695
- 3 周炳琨,高以智,陈家骅 et al. 激光原理.北京:国防工业出版社,1984:23-94
- 4 布雷伯 C A,沃克 S.边界元法的工程应用.西安:陕西科学技术出版社,1985:197-229