激光测距仪的可靠性估计

方启万

(海军工程学院,武汉,430033)

摘要：本文论述了激光测距仪的基本可靠性的定义,分析了激光测距仪平均无故障工作时间的试验方案、点估计和区间估计。

The reliability estimation of laser rangefinders

Fang Qiwan

(Naval Academy of Engineering)

Abstract: This paper discusses the definition of the basic reliability of laser rangefinders, and analyses the testing scheme, point estimation and intervel estimation of the meam time between failures of laser rangefinders.

一、基本可靠性的定义

在国家标准[1]里,可靠性的定义是"产品在规定的条件下和在规定的时间内完成规定功能的能力"。这里"规定的时间"是可靠性定义中的核心,因为不谈时间就无可靠性可言,并且随着产品使用时间的延长,产品的可靠性必然会逐渐降低。所以,一定的可靠性是对一定的时间而言的。正因为如此,"规定的时间"是产、购双方在合同或产品技术标准中明确规定的。而可靠性工程中的"时间"是广义的,既包括通常的"时间",也包括与时间相当的行驶里程、实航次数、发射次数、循环次数、工作周期……等。在激光测距装备的可靠性中,"规定的时间"是指规定的测距次数。

激光测距仪虽是光机电三位一体的现代精密测量装备,但其大部分元件为电子器件,因此,其失效分布为指数分布。它属于可修复产品。根据国家军用标准[2],基本可靠性是与测距仪寿命有关的系统可靠性,是在规定的条件下,无故障工作的持续时间或概率,反映产品对维修人力的要求。这与美军标准 MIL-STD-785B 的规定完全类似。但不同的是后者特别提出了平均无故障工作时间的基本可靠性术语应包括的内容:"基本可靠性　在规定的条件下,无故障工作的持续时间或概率。诸如平均无故障工作时间(MTBF)或平均无故障工作周期(MCBF)这样的基本可靠性术语,应包括产品的所有寿命单元(不仅是任务时间)和产品中的所有失效(不仅是在装配元件级的任务致命性失效)。……"。

而在可修复产品激光测距仪的基本可靠性术语 MTBF,就是指平均无故障测距次数,其定义可引用美军标准《可靠性和维修性术语的定义》的规定:"平均无故障工作时间(MTBF)是可修复产品可靠性的一个基本量度:在规定状态下的特定测量区间,产品的所有部件能够在指定范围内完好工作的寿命单位均值。"

二、试验方案的选定

激光测距仪的平均无故障测距次数 MTBF 是针对产品总体而言的,一般都是未知的,通

常经寿命试验获得一些数据来进行估计。寿命试验类型不同，估计方法就不同。

由于寿命试验往往抽取部分产品进行，这部分产品常称为子样，而其中的每一个产品又称为样品。寿命试验通常不等样品全部失效就结束试验。而结束试验的方式就可将寿命试验分为两种不同的类型——定数截尾试验和定时截尾试验，而每类又分为有替换和无替换的两种，将它们分别记为：

$(n,r,$无$)$，$(n,r,$有$)$，$(n,t_0,$无$)$，$(n,t_0,$有$)$。

在$(n,r,$无$)$和$(n,r,$有$)$定数截尾寿命试验中，用几个产品试验到第 r 个失效终止（试验时间 t 是随机变量）。此类试验充分利用了截尾子样所提供的信息，从而可减少抽验量 n 或试验时间 t。但其最大缺陷是试验时间无法控制，因为第 r 个失效发生的时间是一个随机变量，无法预先估计，给管理带来困难。所以，在激光测距仪的可靠性试验中，作者认为不宜采用定数截尾寿命试验。

另有一种序贯试验，其试验时间一般比定时试验时间短，能充分利用每次失效所提供的信息，可以减少抽验量 n（因为 n 与判定关系不大），可用于产品可靠性的验收试验。但是不管是截尾或不截尾的序贯试验都无法事先预定试验所需的时间和费用，并且它不对平均无故障测距次数作出估计。因此不能用于可靠性鉴定试验。因为鉴定试验的目的是在装备定型、生产定型或重大设计、工艺更改时，验证该装备的设计和工艺能否在规定的条件下满足规定的可靠性要求，提供有记录的试验结果，作为判断可否生产的依据。而定时截尾试验能满足这些要求，因为它事先知道试验和试验费用，并且能根据试验数据得出接收或拒收结论的同时，还能对 MTBF 的真值作出估计。

因为激光测距仪为可修复产品，而修复可理解为替换。对失效产品立即修理好，相当于立即替换，然后继续试验。因此，激光测距仪可靠性鉴定试验，我们选定$(n,t_0,$有$)$有替换定时截尾寿命试验方案，而验收试验选定$(n,t_0,$有$)$和序贯试验两种方案。

三、点 估 计

若 θ 是未知数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是子样，则用来估计 θ 的统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 θ 的点估计量，简称估计。点估计量有明确数量概念，实际经常采用，且常称其为观测值。

测距仪的寿命服从指数分布，其密度函数：

$$f(t)=\frac{1}{\theta}\exp(-t/\theta) \qquad t\geqslant 0 \tag{1}$$

现进行$(n,t_0,$有$)$试验，试验中有 r 台失效，失效时间 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r$，下面用极大似然法求 $\hat{\theta}$。令 $A_1,A_2,\cdots$分别为 n 台在$[0,t_1)$，$[t_1+\mathrm{d}t_1,t_2)$，…内无失效；$B_1,B_2,\cdots$分别为 n 台在$[t_1,t_1+\mathrm{d}t_1)$，$[t_2,t_2+\mathrm{d}t_2)$…内一个失效；A_r 为 n 台在$[t_{r-1}+\mathrm{d}t_{r-1},t_r)$内无失效；$B_r$ 为 n 台在$[t_r,t_r+\mathrm{d}t_r)$内一个失效；C 为 n 台在$[t_r+\mathrm{d}t_r,t_0)$内无失效。观察结果为 $D=A_1B_1A_2B_2\cdots A_rB_rC$，$D$ 的概率为 $P(D)=P(A_1)P(B_1)\cdots P(A_r)P(B_r)P(C)$。

激光测距仪的寿命是外界第一次冲击来到的时间。冲击次数与产品失效数相等。故$[0,t)$内的任一试验位置上失效数 x 服从 Poisson 分布

$$P(x=k)=\frac{t^k}{\theta^k k!}\exp(-t/\theta), \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

n 台测距仪相当于 n 个试验位置同时独立进行可修复试验。设 x_i 为第 i 试验位置在$[0,t)$内的

失效数，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个独立 Poisson 分布的随机变量，其和为 n 台产品在$[0,t)$内的失效总数：$Y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

为求 Y 的分布，先设 $n=2$，则

$$P(Y=k) = \sum_{k_1=0}^{k} P(x_1 = k_1, x_2 = k - k_1)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k} \frac{t^{k_1}}{\theta^{k_1} k_1!}\exp(-t/\theta)\frac{t^{k-k_1}}{\theta^{k-k_1}(k-k_1)!}\exp(-t/\theta)$$

$$= \left(\frac{2t}{\theta}\right)^k \frac{1}{k!}\exp(-2t/\theta) \tag{3}$$

此式利用了组合等式 $\sum_{k_1=0}^{k}\binom{k}{k_1} = 2^k$。(3)式表明：$Y = x_1 + x_2$ 服从参数为$(2t/\theta)$的 Poisson 分布。将 $n=2$ 的(3)式类推可得 n 个 Poisson 变量之和也将服从参数为(nt/θ)的 Poisson 分布，即

$$P(Y=k) = \left(\frac{nt}{\theta}\right)^k \frac{1}{k!}\exp(-nt/\theta) \tag{4}$$

当 $k=0,1$ 时，有

$$P(Y=0) = \exp(-nt/\theta)$$

$$P(Y=1) = (nt/\theta)\exp(-nt/\theta)$$

因为在$[0,t)$内外界冲击 k 次的概率只与此区间长度有关，与区间的起点无关。故可得

$$P(A_i) = \exp\left[-\frac{n}{\theta}(t_i - t_{i-1} - \mathrm{d}t_{i-1})\right], \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

$$P(B_i) = \frac{n}{\theta}\mathrm{d}t_i\exp\left(-\frac{n}{\theta}\mathrm{d}t_i\right), \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

$$P(C) = \exp\left[-\frac{n}{\theta}(t_0 - t_r - \mathrm{d}t_r)\right]。$$

由于 $\mathrm{d}t$ 很小时，$\exp\left(-\frac{n}{\theta}\mathrm{d}t\right) \approx 1$，则可得

$$P(D) = \left[\exp\left(-\frac{n}{\theta}t_1\right)\right]\left(\frac{n}{\theta}\mathrm{d}t_1\right)\left\{\exp\left[-\frac{n}{\theta}(t_2 - t_1)\right]\right\}\left(\frac{n}{\theta}\mathrm{d}t_2\right)$$

$$\cdots\left\{\exp\left[-\frac{n}{\theta}(t_r - t_{r-1})\right]\right\}\left(\frac{n}{\theta}\mathrm{d}t_r\right)\left\{\exp\left[-\frac{n}{\theta}(t_0 - t_r)\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^r\left[\exp\left(-\frac{n}{\theta}t_0\right)\right]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_r \tag{5}$$

我们忽略一个常数，则似然函数为

$$L(\theta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r\exp\left(-\frac{n}{\theta}t_0\right) \tag{6}$$

$$\ln L(\theta) = r\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - \frac{n}{\theta}t_0 \tag{7}$$

令(7)式对 θ 的导数为零，可解得 θ 的估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{nt_0}{r} = \frac{T_0}{r} \tag{8}$$

式中，$T_0 = nt_0$，它表示$(n, t_0, 有)$试验中，到 t_0 时刻为止，激光测距仪的总试验次数。

［例 1］ 现抽 6 台激光测距仪进行$(n, t_0, 有)$试验，$t_0 = 6000$ 次，失效 8 次，试求 θ 的点估

计。

解：$n=6, r=8, t_0=6000$ 次。

则：$\hat{\theta}=\dfrac{nt_0}{r}=4500$ 次 。

点估计量 $\hat{\theta}$ 容易获得，有明确的数量概念，但它决不是真值，是一个接近真值 θ 的估计值，是一个统计量，也是一个随机变量，具有一定的随机变动范围。因为 $\hat{\theta}$ 是子样的函数，而子样是随机变量，所抽子样不同、子样的观察值不同，计算的估计值 $\hat{\theta}$ 也不同。为了解决 $\hat{\theta}$ 与真值 θ 的误差范围有多大和真值 θ 处于这个范围内的可靠程度是多少的问题，我们必须对参数 θ 进行区间估计。

四、区 间 估 计

我们要求估计值 $\hat{\theta}$ 与真值 θ 的误差范围不超过 δ，即 $|\theta-\hat{\theta}|\leqslant\delta$，并且要求出现 $|\theta-\hat{\theta}|\leqslant\delta$ 的概率为 $(1-\alpha)$ 的高概率：

$$P(\hat{\theta}-\delta\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}+\delta)=1-\alpha \tag{9}$$

令 $\underline{\theta}=\hat{\theta}-\delta, \bar{\theta}=\hat{\theta}+\delta$，则上式变为：

$$P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\bar{\theta})=1-\alpha \tag{10}$$

即寻找一个区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 能以 $(1-\alpha)$ 的概率把未知参数 θ 复盖住。寻找的这种区间就是未知参数的区间估计。其中 $\underline{\theta}$ 为 θ 置信下限，$\bar{\theta}$ 为 θ 的置信上限，$(1-\alpha)$ 为置信水平，α 为置信度，$(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 为置信区间。

现抽 n 台激光测距仪进行 $(n, t_0$, 有) 试验，在 $(0, t_0)$ 内有 r 个失效。试求置信度为 α 的平均寿命 θ 的置信区间。

Epstein B 指出：欲求未知参数 θ 的严格置信区间相当困难，但可以找出近似的置信区间，如附图所示。

已知 $(n, t_0$, 有) 试验在截尾时间 t_0 为止有 r 个失效。令第 r 个失效发生在 t_r，并设想第 $(r+1)$ 个失效发生在 $t_{(r+1)}$，则以 t_0 截尾的寿命试验可视为介于分别以 t_r 和 $t_{(r+1)}$ 截尾的寿命试验之间，即有

$$t_r\leqslant t_0\leqslant t_{(r+1)} \tag{11}$$

由于 $T_0=nt_0$ 及相应的 $T_r=nt_r, T_{r+1}=nt_{(r+1)}$

所以
$$T_r\leqslant T_0\leqslant T_{r+1} \tag{12}$$

即
$$\frac{2T_r}{\theta}\leqslant\frac{2T_0}{\theta}\leqslant\frac{2T_{r+1}}{\theta} \tag{13}$$

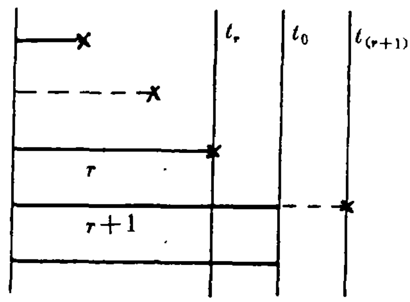

Fig. Intervel estimation

由文献[3]，$\dfrac{2T_r}{\theta}$ 的分布密度函数为

$$f(x)=e^{-x}x^{r-1}/[2^r(r-1)!] \tag{14}$$

这就是自由度为 $2r$ 的 x^2 分布；同样，$\dfrac{2T_{r+1}}{\theta}$ 的分布密度函数是自由度为 $2(r+1)$ 的 x^2 分布，即

$$x^2(2r)\leqslant\frac{2T_0}{\theta}\leqslant x^2(2r+2) \tag{15}$$

故 $\dfrac{2T_0}{\partial}$ 为自由度介于 $2r$ 与 $2(r+1)$ 之间的 x^2 变量，把 α 均分求出 $\alpha/2$ 的分位数 $x^2_{\alpha/2}(2r+2)$ 和 $(1-\alpha/2)$ 的分位数 $x^2_{1-\alpha/2}(2r)$，则可得

$$\frac{2T_0}{\chi^2_{\alpha/2}(2r+2)} \leqslant \theta \leqslant \frac{2T_0}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r)} \tag{16}$$

利用点估计量(8)式 $T_0=r\hat{\theta}$，(16)式可写为

$$\frac{2r}{\chi^2_{\alpha/2}(2r+2)}\hat{\theta} \leqslant \theta \leqslant \frac{2r}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r)}\hat{\theta} \tag{17}$$

由于 χ^2 分布是与未知参数 θ 无关且不含其它未知参数的一个常用分布，故对任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 就可直接利用已有的 χ^2 表计算 θ 的置信区间的上限 $\bar{\theta}$、下限 $\underline{\theta}$ 及相应的置信水平——与 $\bar{\theta}\sim\underline{\theta}$ 对应的分位点间的 χ^2 曲线所包含的面积。在实际应用中，激光测距仪的平均无故障测距次数愈大愈好，因此，我们所关心的是求得在一定置信水平下的置信下限 $\underline{\theta}$ 是多少？

用同样的方法可求得置信水平为$(1-\alpha)$的平均无故障测距次数 θ 的单侧置信下限为：

$$\underline{\theta}=\frac{2T_0}{\chi_\alpha^2(2r+2)}=\frac{2r}{\chi_\alpha^2(2r+2)}\hat{\theta} \tag{18}$$

［例 2］　现抽 10 台激光测距仪进行$(n,t_0,有)$寿命试验，截尾时间 $t_0=3000$ 次。试求 $r=1,2,3,4,5$ 时的平均寿命的点估计量和置信水平为 0.9 的置信区间以及单侧置信下限。

解：已知 $n=10$，$t_0=3000$ 次，$1-\alpha=0.9$。

所以：$T_0=nt_0=30000$ 次，置信度 $\alpha=0.1$

所求结果列表计算如下：

Tabal　The calculating results

r	$\hat{\theta}$	$\chi^2_{0.05}(2r+2)$	$\chi^2_{0.95}(2r)$	$\chi^2_{0.1}(2r+2)$	$\underline{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\underline{\theta}$(单侧)
1	30000	9.488	0.103	7.779	6323	582524	7713
2	15000	12.592	0.711	10.645	4764	84388	5636
3	10000	15.508	1.635	13.362	3868	36697	4490
4	7500	18.308	2.733	15.987	3272	21953	3753
5	6000	21.027	3.940	18.549	2853	15228	3234

计算结果表明：在规定条件下 10 台有 5 个失效，按点估计计算的测距仪的平均无故障测距次数 $\hat{\theta}$ 为 6000 次。但根据指数分布性质，只有 36.8%(即 1/e)的产品的寿命能够达到 6000 次，而 63.2%(即 1－1/e)的产品的寿命在 6000 次以下；产品的置信水平为 0.9 的置信区间(2853，15228)表明：有 5%的激光测距仪的寿命 θ 在 2853 次以下，同时有 5%的激光测距仪的寿命 θ 在 15228 次以上，而 90%的产品平均寿命在 2853 次至 15228 次之间；而其单侧置信下限为 3234 次表明：有 90%的激光测距仪的平均无故障测距次数在 3234 次以上，而另外 10%产品寿命在 3234 次以下。因此我们把平均寿命的单侧置信下限作为激光测距仪的可靠性指标。

参 考 文 献

［1］ 电子工业部. GB3187—82 可靠性基本名词术语及定义. 北京：技术标准出版社，1983：1～6

［2］ 邵德生等. GJB450—88 装备研制与生产的可靠性通用大纲. 北京：国防科工委军标出版发行部，1988：2～24

［3］ 盐见弘著，彭乃学等译. 可靠性工程基础. 北京：科学出版社，1982：99～103

*　　　*　　　*

收稿日期：1993 年 3 月 29 日。　　收到修改稿日期：1993 年 5 月 10 日。