# 湍流大气中定位目标反射回波的光强概率密度函数*

张逸新 迟泽英 陈文建

（无锡轻工业学院机械系，无锡，214036） （华东工学院光电技术系，南京，210014）

**摘要**：本文在分析定位目标粗糙界面和大气湍流对传输光束影响的基础上，运用双随机场模型得到了激光束在弱湍流大气中传输经定位目标反射回波光强起伏的概率密度函数和光电子计数统计关系。

## The probability density function of the intensity of laser reflected from a location target and propagating through turbulent atmosphere*

*Zhang Yixin* *Chi Zeying*, *Chen Wenjian*

(Wuxi Institute of Light Industry) (East China Institute of Technology)

**Abstract**: Based on the analysis of the effects of rough surface target and the atmosphere turbulence on propagating laser beam, and double stochastic field model, we propose the intensity probability density function and the photoelectron counting statistics relation of laser beam reflected from a location target and propagating through weak fluctuation turbulent atmosphere.

## 一、引 言

当激光束由定位目标反射和通过湍流大气传输时，由于大气折射率的随机起伏和散射表面的随机起伏致使光束功率、相位和偏振状态等作随机变化，从而产生相应的光束扩展、闪烁、光束的空间和时间相干性降低和激光束整体抖动等一系列现象，这就限制了激光雷达的目标精确定位和成象分辨率等性能，为此受到人们的重视[1~3]。我们曾在把粗糙界面看作湍流相屏的简化近似下讨论了界面反射回波相位起伏的统计分布[1]和考虑散射回波空间不均匀性时分析了回波光场的统计分布规律[4]。本文将分别考虑大气湍流和定位目标对传输激光束的调制，从理论上分析激光通过湍流大气由定位目标反射回波光强起伏的统计分布规律。

## 二、圆高斯散斑光强概率密度函数

当激光束在湍流大气中传输被目标界面反射时，光束将受到大气湍流和界面起伏的干扰。由于目标界面起伏的规律与大气湍流的随机起伏规律之间是互不相关统计独立的，所以我们可以分别考虑它们对光束的干扰，在分析中我们把目标散射前后的大气湍流看作一个干扰因子，目标随机起伏界面对散射波的影响看作另一个干扰因子。

现分析激光照射到由光学粗糙和光学平滑部分构成的定位目标表面上的回波统计规律。作为近似，本节仅分析导致回波散斑满足圆高斯分布的界面的散射问题，同时认为观察面与散

* 本文曾在"第二届全国激光大气传播及工程应用"学术会上宣读。

射表面相距足够远以致阴影效应可以忽略。回波总瞬时场 $\vec{E}$ 是一个复量，其由目标的粗糙和光滑部分散射回波构成，即

$$\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_g = E\exp(j\theta) \tag{1}$$

式中，$E$ 和 $\theta$ 分别是 $\vec{E}$ 的振幅和相位，$\vec{E}_d$ 和 $\vec{E}_g$ 分别是粗糙部分散射随机分量和光学平滑部分反射回波的径向分量。

设 $\vec{E}$ 中随机散射分量 $\vec{E}_d$ 在观察面内是零均值复高斯随机量。而 $\vec{E}_d$ 的实部 $E_d^r$ 和虚部 $E_d^i$ 是相互独立空间均匀分布的高斯变量。而径向分量 $\vec{E}_g$ 是由互相独立的 $N$ 个光学平滑部分回波构成

$$\vec{E}_g = \sum_{n=1}^{N} A_n\exp(j\varphi_n) = E_g\exp(j\varphi) \tag{2}$$

式中，$A_n$ 和 $\varphi_n$ 是第 $n$ 个光学平滑面反射激光的定常振幅和相位，而 $E_g$，$\varphi$ 是空间随机分布振幅和相位。

由文献[5]可知场 $\vec{E}$ 的光强满足 Rice 分布

$$p_0(I) = \frac{1}{\langle I_d \rangle}\exp\left(-\frac{I + I_g}{\langle I_d \rangle}\right)I_0\left(\frac{2\sqrt{II_g}}{\langle I_d \rangle}\right) \tag{3}$$

式中，$I = \vec{E}^2$，$I_g = \vec{E}_g^2$，$\langle I_d \rangle = 2\sigma_d^2$，$\sigma_d^2$ 是随机散射分量 $E_d$ 的方差，$I_0(\cdot)$ 是第一类零阶变形 Bessel 函数。

以上仅考虑激光束被定位目标散射的情况，在所论问题中我们还必须考虑大气湍流对传输激光的影响。为简化分析假设：1. 光束仅在弱湍流大气中传输，光束抖动对测量光强时间平均值的调制可忽略；2. 入射到目标上的光束线度小于目标线度；3. 目标起伏的空间分布是均匀的。由上述近似和 $E_d$ 是零均值高斯变量，假定可知大气湍流对目标界面散射回波的影响主要是影响镜向反射分量 $E_g$。换言之，现在 $E_g$ 是受大气湍流调制的时变随机变量，而(3)式是条件 Rice 分布

$$p_0(I/I_g) = \frac{1}{\langle I_d \rangle}\exp\left(-\frac{I + I_g}{\langle I_d \rangle}\right)I_0\left(\frac{2\sqrt{II_g}}{\langle I_d \rangle}\right) \tag{4}$$

而回波非条件概率密度函数为

$$p(I) = \int_0^\infty p_0(I/I_g)p_t(I_g)\mathrm{d}I_g \tag{5}$$

式中，$p_t(I_g)$ 是大气湍流干扰下的 $I_g$ 起伏概率密度函数。

在分裂散射模型假设下，观察面内某给定点和给定时刻的光波辐射场，可认为由通过不同湍流路径传输的散射的叠加构成，而总散射场的光强 $x$ 的起伏分布由变形 Rice-Nakagami 分布表示[6]

$$p_t(x) = \frac{1}{b}\exp\left[-\frac{(A^2 + x)}{b}\right]I_0\left(\frac{2A\sqrt{x}}{b}\right) \tag{6}$$

式中，$A$ 是波中未被大气湍流散射的相干常振幅分量，$b$ 是光波中圆复高斯随机分量平均光强，并且有关系 $\langle x \rangle = A^2 + b$，$\sigma_x^2 = b^2 + 2A^2b$。

N. S. R. Gudimetla 等人[7]，分析表明 $M$ 分布是变形 Rice-Nakagami 分布的一个好的近似，所以可以用 $M$ 分布来近似变形 Rice-Nakagami 分布。

$$p_t(x) = \frac{M^M x^{M-1}\exp(-Mx/\langle x\rangle)}{\Gamma(x)\langle x\rangle^M} \tag{7}$$

由此可得目标径向反射分量强度 $I_g$ 的起伏分布

$$p_t(I_g) = \frac{M^M I_g^{M-1}\exp(-MI_g/\langle I_g\rangle)}{\Gamma(M)\langle I_g\rangle^M} \tag{8}$$

这样接收到的回波光强的概率密度函数为

$$p_1(I) = \frac{M^M\exp(-I/\langle I_d\rangle)}{\Gamma(M)\langle I_d\rangle\langle I_g\rangle^M}\int_0^\infty I_g^{M-1}\exp\left[-\left(\frac{1}{\langle I_d\rangle}+\frac{M}{\langle I_g\rangle}\right)I_g\right]I_0\left(\frac{2\sqrt{II_g}}{\langle I_d\rangle}\right)\mathrm{d}I_g$$

$$= \frac{M^M}{\sqrt{I\langle I_g\rangle}}\left(\frac{\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle}\right)^{M-1/2}\exp\left[-\frac{I}{2\langle I_d\rangle}\left(\frac{2M\langle I_d\rangle+\langle I_g\rangle}{M\langle I_d\rangle+\langle I_g\rangle}\right)\right]$$

$$\times M_{\frac{1}{2}-M,0}\left[\frac{I\langle I_g\rangle}{\langle I_d\rangle(\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle)}\right] \tag{9}$$

式中，$M_{k,\mu}(x)$是 Whittake 函数，$\Gamma(x)$是 gamma 函数。

回波光强的 $n$ 阶矩为

$$\langle I^n\rangle = \frac{M^M}{\sqrt{\langle I_g\rangle}}\left(\frac{\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle}\right)^{M-1/2}\int_0^\infty I^{n-1/2}\exp\left[-\frac{I}{2\langle I_d\rangle}\left(\frac{2M\langle I_d\rangle+\langle I_g\rangle}{M\langle I_d\rangle+\langle I_g\rangle}\right)\right]$$

$$\times M_{\frac{1}{2}-M,0}\left[\frac{I\langle I_g\rangle}{\langle I_d\rangle(\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle)}\right]\mathrm{d}I$$

$$= \left(\frac{M\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle}\right)^M\langle I_d\rangle^n\Gamma(n+1)\,{}_2F_1\left[n+1,M,1,\frac{\langle I_g\rangle}{\langle I_g\rangle+M\langle I_d\rangle}\right] \tag{10}$$

式中，${}_2F_1(a,b,c,x)$是超几何函数。

如果定位目标比照射束线度小得多，那么利用大气折射率起伏和目标界面起伏统计独立的性质，把目标对光波的散射看作对大气湍流散射光波径向分量的再调制。与前面分析相同，把(6)式记为 $p_t = p_t(x/A^2)$，而(4)式记为 $p_0(A^2)$并作 $M$ 分布近似，回波场的光强概率密度函数为

$$p_2(I) = M^M\left(\frac{1}{\langle I_d\rangle+M\langle I_g\rangle}\right)^M\langle I_g\rangle^{M-1}\exp\left(-\frac{I}{\langle I_g\rangle}\right)\,{}_1F_1\left[M,1,\frac{I\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle(\langle I_d\rangle+M\langle I_g\rangle)}\right] \tag{11}$$

式中，${}_1F_1(a,b,x)$是合流超几何函数。

与(11)式对应的光强各阶矩为

$$\langle I^n\rangle = \left(\frac{M\langle I_g\rangle}{\langle I_d\rangle+M\langle I_g\rangle}\right)^M\langle I_g\rangle^n\Gamma(n+1)\,{}_2F_1\left[M,n+1,1,\frac{\langle I_d\rangle}{\langle I_d\rangle+M\langle I_g\rangle}\right] \tag{12}$$

由于我们分析的是光在缓变弱湍流平稳大气中传输定位目标反射回波强度起伏问题，与(9)式对应的积分光强与瞬时光强具有相同的分布[8]，$W = \int_t^{t+\tau} I\mathrm{d}t$，即

$$p_1(W) = \frac{M^M}{\langle W_g\rangle}\left(\frac{\langle W_d\rangle}{\langle W_g\rangle+M\langle W_d\rangle}\right)^M\exp\left[-\frac{W}{\langle W_d\rangle}\right]\,{}_1F_1\left[M,1,\frac{W\langle W_g\rangle}{\langle W_d\rangle(\langle W_g\rangle+M\langle W_d\rangle)}\right],$$

由 Mandel 公式，光电子计数分布

$$p_1(m,T) = \int_0^\infty\frac{(aW)^m}{m!}e^{-aW}p_1(W)\mathrm{d}W$$

$$= \left(\frac{M\bar{m}_d}{\bar{m}_g+M\bar{m}_d}\right)^M\frac{\Gamma(m+1)}{m!\,\bar{m}_g}\left(\frac{\bar{m}_d}{1+\bar{m}_d}\right)^{m+1}$$

$$\times {}_2F_1\left[M, m+1, 1, \frac{\overline{m}_g}{(\overline{m}_g + M\overline{m}_d)(1+\overline{m}_d)}\right] \tag{13}$$

式中，$a$ 是比例系数，$\overline{m}_d = a\langle W_d\rangle$，$\overline{m}_g = a\langle W_g\rangle$。用同样的方法我们可得到对应于(11)式的 $p_2(m,T)$。

## 三、椭圆高斯散斑光强概率密度函数

一般情况下粗糙界面散射散斑复振幅满足的是椭圆高斯分布[6]，因此应该分析激光通过湍流大气经该类目标散射回波的光强概率密度函数。由于我们总可以通过坐标变换，把一般椭圆高斯分布简化为互相独立分量对应的分布函数之积，故散斑振幅的实部与虚部的联合概率密度函数可表为

$$p(E_x,E_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{(\Delta E_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(\Delta E_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] = p(E_x)p(E_y) \tag{14}$$

式中，$E_x$ 和 $E_y$ 分别是 $\overline{E}$ 的实部和虚部，$\Delta E_x = E_x - \langle E_x\rangle$ 是 $E_x$ 的起伏量，$\langle E_x\rangle = N\exp(-\sigma^2/2)$ 是 $E_x$ 分量的平均值，$\sigma_x^2 = \langle \Delta E_x^2\rangle = (N/2)[1+\exp(-2\sigma^2) - 2\exp(-\sigma^2)]$ 是 $E_x$ 的起伏方差，$\sigma_y^2 = \langle E_y^2\rangle = (N/2)[1-\exp(-2\sigma^2)]$ 是 $E_y$ 的起伏方差，$\langle\cdot\rangle$ 表示系统统计平均，$N$ 是目标散射元数，$\sigma$ 是目标散射场相位起伏标准差。类似于文献[4]的分析，我们可得到

$$p(I,\theta) = \frac{1}{2\pi\varphi\langle I_d\rangle}\left\{\exp\left[-\frac{2(I+I_g-2\sqrt{II_g}\cos(\theta-\mu))}{(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right] - \exp\left[-\frac{2(I+I_g-2\sqrt{II_g}\cos(\theta-\mu))}{(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right]\right\} \tag{15}$$

利用联合概率密度与边缘概率密度的关系，可得到光强的一阶概率密度函数

$$p(I) = \frac{1}{\varphi\langle I_d\rangle}\left\{\exp\left[-\frac{2(I+I_g)}{(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right] I_0\left[\frac{4\sqrt{II_g}}{(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right] - \exp\left[-\frac{2(I+I_g)}{(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right] I_0\left[\frac{4\sqrt{II_g}}{(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right]\right\} \tag{16}$$

考虑到大气湍流对 $I_g$ 的调制，由(5)式我们得到当目标大于光束线度时湍流大气中传输定位目标散射激光回波的光强概率密度函数

$$\begin{aligned}
p_3(I) = {} & \frac{1+\varphi}{2\varphi}\left(\frac{M(1+\varphi)\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle + M(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right)^M \exp\left[-\frac{2I}{(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right] \\
& \times {}_1F_1\left[M, 1, \frac{I\langle I_g\rangle}{(1+\varphi)\langle I_d\rangle(\langle I_g\rangle + M(1+\varphi)\langle I_d\rangle)}\right] \\
& - \frac{1-\varphi}{2\varphi}\left[\frac{M(1-\varphi)\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle + M(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right]^M \exp\left[-\frac{2I}{(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right] \\
& \times {}_1F_1\left[M, 1, \frac{I\langle I_g\rangle}{(1-\varphi)\langle I_d\rangle(\langle I_g\rangle + M(1-\varphi)\langle I_d\rangle)}\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

相应的各阶强度矩为

$$\begin{aligned}
\langle I^n\rangle = {} & \frac{1+\varphi}{2\varphi}\left[\frac{M(1+\varphi)\langle I_d\rangle}{\langle I_g\rangle + M(1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right]^M [(1+\varphi)\langle I_d\rangle]^n\Gamma(n+1) \\
& \times {}_2F_1\left[n+1, M, 1, \frac{\langle I_g\rangle}{\langle I_g\rangle + (1+\varphi)\langle I_d\rangle}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1-\varphi}{2\varphi}\left[\frac{M(1-\varphi)\langle I_d\rangle}{\langle I_p\rangle + M(1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right]^M \left[(1-\varphi)\langle I_d\rangle\right]^n$$

$$\times \Gamma(n+1)\,{}_2F_1\left[n+1, M, 1, \frac{\langle I_p\rangle}{\langle I_p\rangle + (1-\varphi)\langle I_d\rangle}\right] \tag{18}$$

在定位目标比照射束线度小的情况下，可用类似方法得到相应的结果。

## 四、结论与讨论

本文根据大气湍流起伏和定位目标界面起伏的统计独立性和对传输光束的单独调制作用，得到了激光通过湍流大气传输经粗糙界面反射回波的闪烁概率密度函数(9)式，(11)式和(17)式。这些结果表明，在大气湍流和定位目标共同干扰下的激光回波光强起伏分布，不同于随机粗糙界面和大气湍流单独存在时传输激光强度起伏分布。所以，严格处理湍流大气中传输目标散射回波光强起伏分布问题时，应该注意到这一点。

现有分析表明，光束抖动将影响检测平均光强，从而影响光闪烁概率分布[6]，并且用 $M$ 分布替代 Rice-Nakagami 分布的近似，在球面波源和参数 $M\geqslant 5$ 的条件下，是误差小于 3% 的好的近似[7]。由于本文在分析中忽略了光束抖动效应和采用了 Rice-Nakagami 分布的 $M$ 分布近似，故所得结果仅适用于发散球面波在弱湍流起伏区域传输经粗糙界面反射的光闪烁概率分布问题。

### 参考文献

[1] 张逸新，迟泽英：中国激光，1992；19(2)；117
[2] Fante R: IEEE Trans，1984；32(12)；1358
[3] Aksenov V P: Opt Spectrosc USSR，1986；61(4)；526
[4] 张逸新，迟泽英：科学通报，1991；36(9)；661
[5] Jakeman E；Pusey P N J A: Advan Phys，1988；37(5)；471
[6] Andrews L C; Phillips R L: J O S A，1986；3(11)；1912
[7] Gudimetla V S R；Holmes J F: J O S A，1982；72(9)；1213
[8] Saleh B: Photoelectron Statistics. New Springer-Verlay，1978；160
[9] Costa G D；Guerri G: J O S A，1978；68(6)；866

*　　　　*　　　　*

作者简介：张逸新，男，1956年4月出生。副教授，目前主要从事激光大气传输和图象处理方面的研究。
迟泽英，男，1938年出生。教授。目前主要从事特种光纤和光学设计的研究。
陈文建，男，1965年出生。讲师。目前主要从事光学设计和成象方面的研究。

收稿日期：1993年2月17日。　　收到修改稿日期：1993年5月4日。



·产品简讯·

## Orion 压缩激光器

Orion 是一种新颖的多波长/多脉宽激光器，它利用布里渊和喇曼散射压缩 SLM Nd：YAG 振荡器的输出和移动输出波长。单个 Orion 可提供 8ns 至 4ns 脉宽，1900nm 至 266nm 波长，其脉冲能量为毫焦耳。

译自 L & O，1993；12(4)；19　　邹福清　译　　刘建卿　校