

透射体积全息图成象的几何分析

胡德敬

(同济大学物理系, 上海)

摘要: 本文用几何方法讨论了透射体积全息图的成象公式, 并和平面全息图的成象公式作一比较。最后给出实验验证。

Geometric analysis of holographic imaging of transmissive volume

Hu Dejing

(Department of Physics, Tongji University)

Abstract, This paper demonstrated a image formula of transmissive volume hologram geometrically. The image formula is comparatively discussed with plane hologram. The experimental results are presented.

一、引 言

在有关全息术的书籍和文章中, 对平面全息图的成象公式分析较多, 对透射体积全息图的成象关系几乎未予提及, 可是在白光全息、彩虹全息及其它全息显示和实验中, 很多全息图均已进入体积全息范围。按照粗略的分析方法是, 当记录介质的厚度 d 小于干涉条纹间距 Λ 时, 就是平面全息图; 反之, 当 $d > \Lambda$ 时, 就是体积全息图^[1,2]。还有一种就是利用参数 Q 来区分。 $Q = 2\pi\lambda d / (cn_D \Lambda^2)$, 式中, λ , n_D 分别为照明光波的波长和记录介质的折射率。当 $Q \geq 10$ 时, 就是体积全息图^[3,4]。我们现在常用的天津全息干板 I 型的记录介质厚度 $d \cong 7 \times$ 间对改善芯部质量是有益的。

1100℃ H₂ 中退火 10h, 虽然有褪白功能, 然而副效应是大的, 不可低估。

参 考 文 献

- [1] 李敢生, 洪远珍, 陈天彬 *et al.* 硅酸盐学报, 1983, 11(1), 95
- [2] 史子康. 应用科学学报, 1991, 9(4), 341
- [3] 谭奇光, 小川智哉 (日本). Nd:YAlO₃ 单晶中的缺陷和包裹物. 日本: 秋季第48回应用物理学会学术演讲会, 1987
- [4] 李敢生, 郭喜彬. 人工晶体, 1987, 16(1), 75
- [5] 史子康. 应用激光, 1989, 9(3), 106
- [6] 史子康, 梁桂金. 人工晶体, 1988, 17(1), 47
- [7] Belt R F, Latore J R, Uhrin R *et al.* A P L, 1974, 25(4), 218

收稿日期: 1992年5月9日。

10^3 mm, 根据布喇格条件, 当两束入射光夹角为 θ 时, 则干涉条纹间距 $A = \lambda / 2 \sin \frac{\theta}{2}$ 。如 $\lambda = 6.328 \times 10^{-4}$ mm, $\theta = 5.3^\circ$ 时, 有 $d = A \approx 7 \times 10^{-3}$ mm。粗略地说, 当 $\theta > 5.3^\circ$ 时, $A < d$, 就是体积全息图。如按 Q 参数来区分, 当 $Q = 10$ 时, 如: $\lambda = 6.328 \times 10^{-4}$ mm, $d = 7 \times 10^{-3}$ mm, $n_D = 1.5$, 可算得 $\theta = 27^\circ$, 此时全息图也是体积全息图。由上述两个例子可知, 很多全息图都已进入体积全息图范围。本文利用几何方法在拍摄彩虹全息字的过程中, 对透射体积全息图的成象关系作了一些分析研究, 并指出它与平面全息图成象公式的关系, 同时用实验加以说明。

二、理论分析

我们用图1来分析两点源全息图成象公式的推导过程。 $P(X_0, Y_0, Z_0)$ 和 $R(X_r, Y_r, Z_r)$ 分别表示物波点和参考光波点, XOY 坐标位于全息干板间表面, 由于是体全息, 来自 P 和 R 的光波分别经过干板前表面 M 点和 N 点后, 在记录介质中的 S 点干涉。为了方便, 物光波、参考光波和再现光波的位相变化均用相对于原点 O 的位相差来表示(因为从原点 O 到 S 点的位相变化, 各光波均相同), 且超前为正, 迟后为负。 S 点的物光波可表示为:

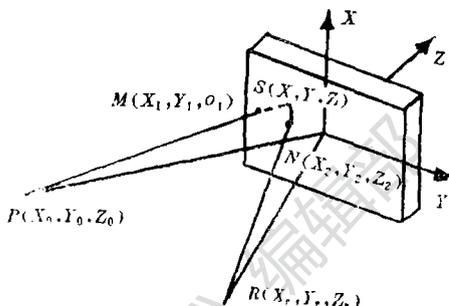


图1 两点源发出的光波

$$U(X, Y, Z) = A_0(X, Y, Z) \exp i \varphi_0(X, Y, Z)$$

式中,

$$\varphi_0(X, Y, Z) = -\frac{2\pi}{\lambda} (\overline{PM} + \overline{MS} - \overline{PO})$$

式中, 负号表示括号中的值为正时, S 点的位相迟后于 O 点的位相。

$$\begin{aligned} \varphi_0(X, Y, Z) &= 2\pi \left\{ \frac{z_0}{\lambda} \left(1 + \frac{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}{Z_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 2\pi \left[\frac{Z_0}{\lambda} \left(1 + \frac{X_0^2 + Y_0^2}{Z_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{2Z_0} (X_1^2 + Y_1^2 - 2X_0X_1 - 2Y_0Y_1) \right] + \frac{2\pi n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, λ_D 表示光在记录介质中的波长。同理, 参考光波的位相变化可表示为:

$$\begin{aligned} \varphi_r(X_r, Y_r, Z_r) &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{2Z_r} (X_2^2 + Y_2^2 - 2X_rX_2 - 2Y_rY_2) \right] + \\ &\quad + \frac{2\pi n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

全息图再现时, 仍用点光源照明, 此点光源坐标为 (X_c, Y_c, Z_c) 。其波长为 λ_c , 则再现光到达 S 点的位相, 同上可写为:

$$\varphi_c(X_c, Y_c, Z_c) = \frac{2\pi}{\lambda_c} \left[\frac{1}{2Z_c} (X_2^2 + Y_2^2 - 2X_c X_2 - 2Y_c Y_2) \right] + \frac{2\pi n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

按全息图基本原理, 所成原始象的再现光波可表示为:

$$T(X, Y, Z) = \beta \cdot C_0 A_0 R_0 \exp i(\varphi_c + \varphi_0 - \varphi_r)$$

式中, β 为有关常数, R_0 , A_0 , C_0 分别为参考光波、物光波和再现光波的振幅, 所以形成物点 P 的再现虚象的位相 φ_p 为:

$$\varphi_p = \varphi_c + \varphi_0 - \varphi_r \quad (4)$$

将 (1) 式、(2) 式和 (3) 式代入, 则有:

$$\varphi_p = \pi \left\{ \left[(X_2^2 + Y_2^2) \left(\frac{1}{\lambda_c Z_c} + \frac{1}{\lambda Z_r} \right) + \frac{1}{\lambda Z_0} (X_1^2 + Y_1^2) \right] - 2 \left[X_1 \frac{X_0}{\lambda Z_0} + X_2 \left(\frac{X_c}{\lambda_c Z_c} - \frac{X_r}{\lambda Z_r} \right) \right] - 2 \left[Y_1 \frac{Y_0}{\lambda Z_0} + Y_2 \left(\frac{Y_c}{\lambda_c Z_c} - \frac{Y_r}{\lambda Z_r} \right) \right] + \frac{2\pi n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5)$$

设再现象的位置坐标为 (X_p, Y_p, Z_p) , 同 (1) 式, 它也应有下列形式:

$$\varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda_c} \left[\frac{1}{2Z_p} (X_1^2 + Y_1^2 - 2X_p X_1 - 2Y_p Y_1) \right] + \frac{2\pi n_D}{\lambda_D} \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

用系数比较法, 由 (5) 式和 (6) 式可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Z_p} &= \frac{X_2^2 + Y_2^2}{X_1^2 + Y_1^2} \cdot \frac{1}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{1}{Z_0} - \frac{X_2^2 + Y_2^2}{X_1^2 + Y_1^2} \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot \frac{1}{Z_r} \\ \frac{X_p}{Z_p} &= \frac{X_2}{X_1} \frac{X_c}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{X_0}{Z_0} - \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot \frac{X_2}{X_1} \frac{X_r}{Z_r} \\ \frac{Y_p}{Z_p} &= \frac{Y_2}{Y_1} \frac{Y_c}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{Y_0}{Z_0} - \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{Y_2}{Y_1} \frac{Y_r}{Z_r} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这就是透射体积全息图的物象关系式。共轭象的关系可由 $\varphi_p = \varphi_c - \varphi_0 + \varphi_r$ 同理分析。

平面全息图的再现原始象的物象公式是^[2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Z_p} &= \frac{1}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_r} \right) \\ \frac{X_p}{Z_p} &= \frac{X_c}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(\frac{X_0}{Z_0} - \frac{X_r}{Z_r} \right) \\ \frac{Y_p}{Z_p} &= \frac{Y_c}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(\frac{Y_0}{Z_0} - \frac{Y_r}{Z_r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

显然 (7) 式和 (8) 式是不同的, 但通常拍摄全息图时, 物点源和参考光点源离干板距离均远远大于记录介质的厚度, 也远远大于干板的横向尺寸, 因而 (7) 式可作简化, 现逐

一分析。

1. 通常物点源和参考光点源是等高的，或通过适当选取坐标轴也可做到这一点，现假设两点源均取在YOZ平面内，由此两点源发出的光波如图1所示，经干板前表面M，N两点而在记录介质内S点干涉。从M，N和S三点的几何关系，有：

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y - \Delta Y_1 \\
 &= Y - \left[(\sin\theta'_M \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + Z^2})^2 - (X_1 - X)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= Y - \left[\left(\frac{\sin\theta_M}{n_D} \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + Z^2} \right)^2 - (X_1 - X)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= Y - \left\{ \frac{Y_1^2 + (X_1 - X_0)^2}{n_D^2 [(X_1 - X_0)^2 + Y_1^2 + Z_0^2]} [(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + Z^2] - (X_1 - X)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

式中， θ_M 为M点的入射角， θ_M' 为折射角，空气的 $n=1$ 。

当 Y_1 值大于毫米时，由于记录介质的厚度是微米数量级，所以根式中第一项也是微米数量级，减去第二项就更小，故可取 $Y_1 \approx Y$ 。同理可证 $Y_2 \approx Y$ ， $Y_2/Y_1 = 1$ 。

当 Y_1 值小于毫米时，由于 $\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 + Z_0^2}$ 值较大，此时 $Y_1 / [(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 + Z_0^2]^{\frac{1}{2}} \ll 1$ ，加上记录介质厚度只有几个微米，所以折射光在S点的高度几乎不变，即 $Y \approx Y_1$ ，同理 $Y \approx Y_2$ ，从而(7)式中的第三式也就可简化为成(8)式中的第三式。

2. 由以上分析可知， $Y_1 \approx Y_2$ ，下面分析一下比值 X_2/X_1 是多少？

在分析物光波位相变化时，曾有(1)式，其中第一项是：

$$\frac{2\pi Z_0}{\lambda} \left[1 + \frac{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}{Z_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

由于我们讨论的前提条件是： $Z_0^2 \gg X_0^2$ ， $Z_0^2 \gg Y_0^2$ ，如 $X_1 \sim 0$ ，则 $(X_1 - X_0)^2 \approx X_0^2$ ，这样就会使位相差公式中包含 X_1 的项消失，这是不符合实际的，不符合讨论要求的。同理，(2)式、(3)式和(6)式的推导过程中， X_1 和 X_2 也不能取零和很小值。

由折射定律可知，光由空气射入 $n=1.5$ 的记录介质时，如最大的入射角取 90° ，折射角也小于 45° ，所以 X_1 和 X_2 的最大距离总小于记录介质厚度的2倍，即小于 $14 \times 10^{-3} \text{mm}$ ，因此，只要物光波和参考光波在记录介质表面入射点离开原点很小一点距离，就有 $X_2/X_1 \approx 1$ 。偏离原点越大， X_2 与 X_1 的比值就越准确的接近于1。由于坐标原点的选取是任意的，所以(7)式中的第二式也可简化为(8)式中的第二式。

3. 由1点和2点分析可知， $Y_1 = Y_2$ ， $X_1 = X_2$ ，所以 $(X_2^2 + Y_2^2) / (X_1^2 + Y_1^2) = 1$ ，即(7)式中的第一式也就可简化为(8)式中的第一式。

由上讨论可知，在记录介质很薄时，物波点源和参考光点源离干板很远时，可用平面全息图的成象公式来讨论透射体积全息图，即(7)式可简化为(8)式。

三、实验和结论

我们用图2的角度关系来制作全息彩虹字，图中 R 、 O_1 和 O_2 分别表示参考光波和两个物

光波，它们与 $-Z$ 轴夹角分别为 12° ， 33° （ O_1 与 $-Z$ 轴）和 42° ，用 R 和 O_1 拍摄字体本身，曝光一次，然后在同一张片子上，用 R 和 O_2 拍摄字的背景部分，再曝光一次。再现时，当我们向着物光 O_1 方向观察时，看到在绿的背景上出现红的字，它们分别对应光波波长约为 $5.5 \times 10^{-4} \text{mm}$ 和 $6.3 \times 10^{-4} \text{mm}$ ，这说明对于全息图中字的背景部分，由于不是原拍摄光波波长，从而偏离了原来的衍射方向（ O_2 方向），偏转角为 9° 。虽然物光和参考光夹角很大，记录的是体积全息图，由于点源离干板远，记录介质薄，仍可用平面全息图的成象公式来分析。对上述实验现象我们用（8）式中的第二式来讨论：

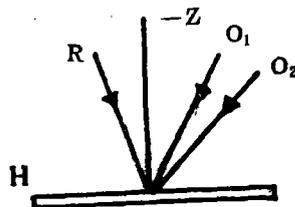


图 2 制作全息字的角度图

$$\frac{X_p}{Z_p} = \frac{X_c}{Z_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{X_0}{Z_0} - \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{X_r}{Z_r}$$

上式可改写为：

$$\text{tg}\theta_p = \text{tg}\theta_c + \frac{\lambda_c}{\lambda} (\text{tg}\theta_0 - \text{tg}\theta_r) \quad (9)$$

式中， θ_p ， θ_c ， θ_0 和 θ_r 分别表示各光波与 $-Z$ 轴的夹角。由于实验中各点源离干板远，所以可取 $\text{tg}\theta \approx \sin\theta$ ，故（9）式又可写成（10）式：

$$\sin\theta_p = \sin\theta_c + \frac{\lambda_c}{\lambda} (\sin\theta_0 - \sin\theta_r) \quad (10)$$

因为， $\theta_c = \theta_r$ ， $\lambda_c = 5.5 \times 10^{-4} \text{mm}$ ， $\lambda = 6.3 \times 10^{-4} \text{mm}$ ，所以有 $\sin\theta_p = -\sin 12^\circ + \frac{55}{63} (\sin 42^\circ + \sin 12^\circ) = 0.5577$ ， $\theta_p = 33.9^\circ$ ，这一计算结果基本上和实验结果相符。其它一些实验结果也同样可证明平面全息图成象公式的适用性，因篇幅所限不再讨论。

综上所述，当记录介质很薄， $Z^0 \gg X_0$ ， $Z_0 \gg Y_0$ 时，平面全息图成象公式对透镜体积全息图同样适用，实验事实也证明其正确性。

参 考 文 献

- 〔1〕 于美文，张静芳。全息显示技术。北京：科学出版社，1989：35，68
- 〔2〕 杨国光主编。近代光学测试技术。北京：机械工业出版社，1986：67
- 〔3〕 史密斯 H M 编。全息记录材料。北京：科学出版社，1984：3
- 〔4〕 〔日〕松下昭，平井记光。全息照相原理及实验。北京：科学出版社，1988：162

作者简介：胡德敬，男，1941年1月出生。副教授。现在主要从事现代光学测试、全息术及其应用和光电子学的研究。

收稿日期：1992年5月4日。