

# 球面端面锥形发散梯度折射率透镜的设计理论\*

廖廷岱

(福建师范大学激光研究所, 福州)

**摘要:** 本文系统地研究了球面端面的锥形发散梯度折射率纤维透镜的几何光学设计理论以及用作激光束变换元件的设计规律。

## Design theory of a conical defocusing GRIN fiber lens with spherical end surfaces

Liao Tingdi

(Institute of Lasers, Fujian Normal University)

**Abstract:** Based on geometrical optical theory and beam optics, the design theory of conical defocusing gradient index fiber lens with spherical end surfaces is developed. The conical defocusing index fiber lens can be used as imaging element and laser beam transformation elements.

### 一、引言

锥形纤维透镜是一种新颖的非圆柱形梯度折射率透镜, 其数值孔径、结构紧凑性及象质性能均比柱形梯度折射率纤维透镜优越。这种纤维透镜在微型激光光电子系统中有着广阔的应用前景, 近年来对这种新颖透镜的光学特性的研究已有若干报道<sup>[1~4]</sup>。随着应用的迅速发展, 对梯度折射率光学系统将提出新的更高的要求。在高性能微型梯度折射率光学系统的设计中, 为更好地校正色差和匹兹瓦场曲, 往往需采用相当于负透镜的发散梯度折射率纤维透镜<sup>[5,6]</sup>。例如消色差微型内窥镜成象系统, 又如采用逆伽利略望远镜扩束型光波导连接器。然而, 迄今对这种发散梯度折射率透镜的设计研究还不多<sup>[7~10]</sup>。文献[9]和[10]的作者从光线方程出发, 研究了锥形发散梯度折射率纤维透镜的近轴成象特性, 本文拟进一步研究球面端面的锥形发散梯度折射率纤维透镜的几何光学设计理论, 并探讨这种纤维透镜用作激光束变换元件的设计规律。

### 二、球面端面锥形发散GRIN透镜的ABCD矩阵

先设锥形发散梯度折射率纤维透镜的厚度为 $d$ , 两端面为平行平面, 分别位于坐标 $z$ 轴的 $z=0$ 和 $z=d$ 处, 取直角坐标系 $(x, y, z)$ ,  $z$ 轴与纤维光轴重合, 则锥形发散梯度折射率纤维

\* 福建省自然科学基金资助课题。

的折射率分别为

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 + g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (1)$$

式中,  $n_0$  为纤维轴中心处的折射率,  $g(z)$  为纤维沿  $z$  轴的梯度参数,

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - z/L} = \frac{g_0}{t(z)} \quad (2)$$

式中,  $g_0 = g(0)$ ,  $t(z) = 1 - z/L$ ,  $L$  为纤维大端面至锥顶点的距离。

在弱非均匀质条件下, 近轴光线方程为

$$\ddot{x}(z) - g^2(z)x(z) = 0 \quad (3)$$

利用变量替换法从方程(3)可解得如下近轴光线轨迹方程<sup>[1]</sup>。

$$x(z) = \sqrt{t} \left[ \text{ch}(blnt) - \frac{1}{2b} \text{sh}(blnt) \right] x_0 - \left[ \frac{L}{b} \sqrt{t} \text{sh}(blnt) \right] p_0 \quad (4)$$

$$\dot{x}(z) = \left[ -\frac{g_0^2 L}{b\sqrt{t}} \text{sh}(blnt) \right] x_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \text{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \text{sh}(blnt) \right] p_0 \quad (5)$$

式中,  $x_0 = x(0)$ ,  $p_0 = \dot{x}(0)$ , 为入射光线的初始位置和斜率。

方程(4), (5)可表示为如下矩阵方程

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ n_0 \dot{x}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(z) & \frac{1}{n_0} x_1(z) \\ n_0 \dot{x}_2(z) & \dot{x}_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ n_0 p_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中, 矩阵元  $x_1$ ,  $x_2$  及  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  为

$$\left. \begin{aligned} x_1(z) &= -\frac{L}{b} \sqrt{t} \text{sh}(blnt) \\ x_2(z) &= \sqrt{t} \left[ \text{ch}(blnt) - \frac{1}{2b} \text{sh}(blnt) \right] \\ \dot{x}_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \text{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \text{sh}(blnt) \right] \\ \dot{x}_2(z) &= -\frac{g_0^2 L}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \text{sh}(blnt) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

且满足关系式  $\dot{x}_1(z)x_2(z) - x_1(z)\dot{x}_2(z) = 1$ 。

现考虑两端面为球面的锥形发散梯度折射率纤维透镜, 利用文献[3]提出的等效光学系统处理方法, 可写出球面端面的锥形发散梯度折射率纤维透镜的  $ABCD$  矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & \frac{1}{n_0} x_1 \\ n_0 \dot{x}_2 & \dot{x}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - \frac{\varphi_1}{n_0} x_1 & \frac{1}{n_0} x_1 \\ n_0 \dot{x}_2 - \varphi_1 \dot{x}_1 - \varphi_2 x_2 + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0} x_1 & \dot{x}_1 - \frac{\varphi_2}{n_0} x_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\varphi_1, \varphi_2$  为两球面端面的等效光焦度。

$$\varphi_1 = \frac{n_0 - 1}{R_1} \quad (9)$$

$$\varphi_2 = -\frac{n_0 - 1}{R_2}$$

式中,  $R_1, R_2$  为端面的球面半径, 对凹球面有  $R_1 < 0, R_2 > 0$ , 从而  $\varphi_1 < 0, \varphi_2 < 0$ 。利用  $\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = 1$  可以证明  $\det [AD - BC] \equiv 1$ 。

### 三、锥形发散梯度折射率透镜的几何光学设计

考虑球面端面的锥形发散梯度折射率纤维透镜的近轴成像, 如图1所示, 设物体  $AB$  距纤维大端球面前  $l_0$  处, 经透镜所成的象  $A'B'$  距小端球面  $l_0'$  处, 光学系统的成像矩阵为

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & l_0' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + l_0' C & B + l_0' D - l_0 A - l_0 l_0' C \\ C & D - l_0 C \end{pmatrix} \quad (10)$$

根据光学系统传递矩阵的性质, 可得象距  $l_0'$  和象的横向放大率  $\beta$ :

$$l_0' = \frac{l_0 A - B}{D - l_0 C} \quad (11)$$

$$\beta = 1 / (D - l_0 C) \quad (12)$$

(11)式, (12)式可表示为

$$l_0' = l_f' - \frac{f'^2}{l_0 - l_f} \quad (13)$$

$$\beta = f' / (l_0 - l_f) \quad (14)$$

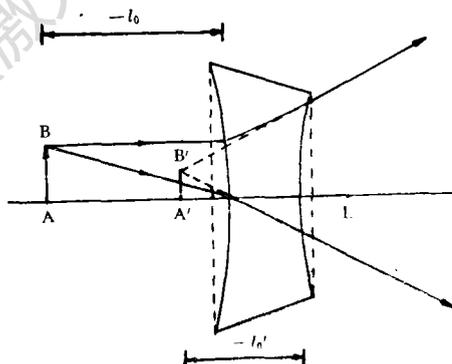


图1 锥形发散梯度折射率透镜的成像原理

式中,  $f', l_f, l_f'$  为球面端面锥形发散梯度折射率纤维透镜的高斯参数

$$\left. \begin{aligned} f' &= -\frac{1}{C} = - \left[ n_0 \dot{x}_2(z) - \varphi_1 \dot{x}_1(z) - \varphi_2 x_2(z) + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0} x_1(z) \right]^{-1} \\ l_f &= +\frac{D}{C} = - \left[ \dot{x}_1(z) - \frac{\varphi_2}{n_0} x_1(z) \right] \cdot f' \\ l_f' &= -\frac{A}{C} = \left[ x_2(z) - \frac{\varphi_1}{n_0} x_1(z) \right] \cdot f' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将(7)式的  $x_1(z), x_2(z)$  及  $\dot{x}_1(z), \dot{x}_2(z)$  代入(15)式得

$$\left. \begin{aligned}
 f' &= \left\{ \frac{n_0 g_0^2 L}{b \sqrt{t}} \operatorname{sh}(blnt) + \frac{\varphi_1}{\sqrt{t}} \left[ \operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_2 \sqrt{t} \left[ \operatorname{ch}(blnt) - \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0} \cdot \frac{L}{b} \sqrt{t} \operatorname{sh}(blnt) \right\}^{-1} \\
 l_f &= - \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] + \frac{\varphi_2}{n_0} \cdot \frac{L}{b} \sqrt{t} \operatorname{sh}(blnt) \right\} \cdot f' \\
 l_f' &= \left\{ \sqrt{t} \left[ \operatorname{ch}(blnt) - \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] + \frac{\varphi_1}{n_0} \cdot \frac{L}{b} \sqrt{t} \operatorname{sh}(blnt) \right\} \cdot f'
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

利用(11)式~(16)式即可进行锥形发散梯度折射率纤维透镜成象元件的几何光学设计。

#### 四、锥形发散GRIN透镜的光束光学设计

现研究球面端面锥形发散梯度折射率纤维透镜用作激光束变换元件的设计原理。如图2所示, 设入射高斯光束束腰位于锥形发散梯度折射率纤维大端球面前 $l_0$ 处, 束腰半径为 $\omega_0$ ; 出射高斯光束束腰距纤维小端球面 $l_0'$ 处, 束腰半径为 $\omega_0'$ , 则根据高斯光束传播理论有

$$q = q_1 + (-l_0) = i \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} - l_0 \quad (17)$$

$$q' = q_2 - l_0' = i \frac{\pi \omega_0'^2}{\lambda} - l_0' \quad (18)$$

$$q' = (Aq + B)/(Cq + D) \quad (19)$$

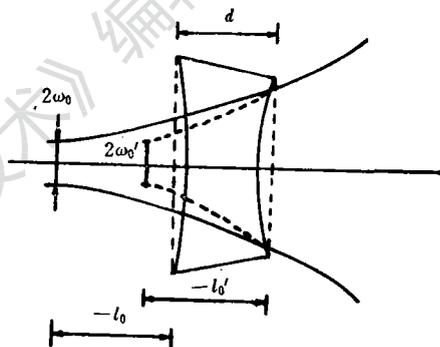


图2 高斯光束经锥形发散纤维的变换

从(17)式~(19)式可解得:

$$\omega_0' = \omega_0 f' \cdot [(l_0 - l_f)^2 + z_0^2]^{-1/2} \quad (20)$$

$$l_0' = l_f' - (l_0 - l_f) \cdot f'^2 \cdot [(l_0 - l_f)^2 + z_0^2]^{-1} \quad (21)$$

引入束腰光斑放大率 $\beta = \omega_0' / \omega_0$ , 则(20)式, (21)式可表示为

$$l_0' = l_f' - (l_0 - l_f) \beta^2 \quad (22)$$

$$\beta^2 = f'^2 / [(l_0 - l_f)^2 + z_0^2] \quad (23)$$

式中,  $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$  为光束瑞利距离;  $f'$ ,  $l_f$ ,  $l_f'$  为高斯参数, 由(16)式给出。

显然, 对于锥形发散纤维透镜, 当 $\varphi_1 < 0$ ,  $\varphi_2 < 0$ 时有 $f' < 0$ 。若取 $(l_0 - l_f)^2 \geq f'^2$ , 则有 $\beta < 1$ 和 $l_0' \geq l_f'$ , 即 $\omega_0' < \omega_0$ , 光束发散角增大, 且束腰位于 $F'$ 之右。

在 $z_0^2 \ll (l_0 - l_f)^2$ 的条件下, (20)式~(23)式分母中的 $z_0^2$ 可忽略不计, 则化为几何光学成象公式(13)式, (14)式。可见, 当 $z_0 \ll |l_0 - l_f|$ 时, 高斯光束可近似认为是球面波, “束腰光斑”可视为“点光源”。因此,  $|l_0 - l_f| \gg z_0$ 等效于几何光学近似条件。实际上, 当 $\omega_0 \sim 10\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )时,  $z_0 \sim 10\omega_0$ , 而 $l_0 - l_f$ 为mm量级, 这时 $z_0^2$ 与 $(l_0 - l_f)^2$ 相比小 $10^{-4}$ , 完全可以忽略。

利用上述公式, 即可进行锥形发散梯度折射率激光束变换元件的设计, 在满足 $z_0 \ll |l_0 - l_f|$ 条件下, 高斯光束束腰的变换可按照点光源的共轭成象处理。否则, 应由公式(20)~

(23) 计算。

### 五、讨论与结论

综上所述, 我们研究了球面端面的锥形发散梯度折射率纤维透镜成像元件及激光束变换元件的设计规律。所得结果经适当变换后还可用于两端面为平面、或只有一个端面为球面的锥形以及柱形发散梯度折射率纤维元件的设计。

1. 令  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , 平面端面锥形发散梯度折射率元件, (16) 式化为<sup>[9]</sup>

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{b \sqrt{t}}{n_0 g_0^2 L \operatorname{sh}(b \ln t)} \\ l_f &= - \frac{b \left[ \operatorname{ch}(b \ln t) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(b \ln t) \right]}{n_0 g_0^2 L \operatorname{sh}(b \ln t)} \\ l_{f'} &= \frac{bt \left[ \operatorname{ch}(b \ln t) - \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(b \ln t) \right]}{n_0 g_0^2 L \operatorname{sh}(b \ln t)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

2. 令  $L \rightarrow \infty$ , 即  $\frac{L}{b} \rightarrow \frac{1}{g_0}$ ,  $\frac{1}{L} \rightarrow 0$ ,  $b \ln t \rightarrow -g_0 d$ , 球面端面柱形发散梯度折射率纤维, 从 (16) 式得:

$$\left. \begin{aligned} f' &= \left[ (\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{ch}(g_0 d) - \left( n_0 g_0 + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0 g_0} \right) \operatorname{sh}(g_0 d) \right]^{-1} \\ l_f &= - \frac{\operatorname{ch}(g_0 d) - \frac{\varphi_2}{n_0 g_0} \operatorname{sh}(g_0 d)}{(\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{ch}(g_0 d) - \left( n_0 g_0 + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0 g_0} \right) \operatorname{sh}(g_0 d)} \\ l_{f'} &= \frac{\operatorname{ch}(g_0 d) - \frac{\varphi_1}{n_0 g_0} \operatorname{sh}(g_0 d)}{(\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{ch}(g_0 d) - \left( n_0 g_0 + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{n_0 g_0} \right) \operatorname{sh}(g_0 d)} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

3. 当  $g_0^2 L^2 \gg \frac{1}{4}$  时, 令  $\frac{1}{b} \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow g_0 L$ , 如  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , 本文结果化为文献 [10] 和文献 [11] 的结果:

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{\sqrt{t}}{n_0 g_0 \operatorname{sh}(g_0 L \ln t)} \\ l_f &= - \frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{\operatorname{ch}(g_0 L \ln t)}{\operatorname{sh}(g_0 L \ln t)} \\ l_{f'} &= \frac{t}{n_0 g_0} \cdot \frac{\operatorname{ch}(g_0 L \ln t)}{\operatorname{sh}(g_0 L \ln t)} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4. 令  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ , 即平面端面柱形发散纤维情形<sup>[6, 12]</sup>

$$\left. \begin{aligned} f' &= -\frac{1}{n_0 g_0 \operatorname{sh}(g_0 d)} \\ l_f &= \frac{1}{n_0 g} \cdot \frac{\operatorname{ch}(g_0 d)}{\operatorname{sh}(g_0 d)} \\ l_f' &= -\frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{\operatorname{ch}(g_0 d)}{\operatorname{sh}(g_0 d)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

5. 在(16)式(或(25)式)中令  $\varphi_1 = 0$  或  $\varphi_2 = 0$  可得一个端面为球面, 另一端面为平面的锥形(或柱形)发散纤维的有关结果, 如在(16)式中令  $\varphi_2 = 0$  得:

$$\left. \begin{aligned} f' &= \left\{ \frac{n_0 g_0^2 L}{b\sqrt{t}} \operatorname{sh}(blnt) + \frac{\varphi_1}{\sqrt{t}} \left[ \operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] \right\}^{-1} \\ l_f &= -\frac{\operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt)}{\frac{n_0 g_0^2 L}{b\sqrt{t}} \operatorname{sh}(blnt) + \varphi_1 \left[ \operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right]} \\ l_f' &= \frac{t \left[ \operatorname{ch}(blnt) - \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right] + \frac{\varphi_1}{n_0} \frac{L}{b} t \operatorname{sh}(blnt)}{\frac{n_0 g_0^2 L}{b\sqrt{t}} \operatorname{sh}(blnt) + \varphi_1 \left[ \operatorname{ch}(blnt) + \frac{1}{2b} \operatorname{sh}(blnt) \right]} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

这些公式与(13)式, (14)式及(22)式, (23)式一起即可用于各种锥形或柱形发散梯度折射率成象元件和光束变换元件的设计。可见, 本文结果是有普遍意义的, 文献[6,9~12]是本文的一些特例。

### 参 考 文 献

- [1] Brown S J S. Appl Opt, 1980; 19(7): 1056~1060
- [2] 殷宗敏, 祝颂来. 物理学报, 1981; 30(12): 1603~1608
- [3] 廖廷悌, 邹义榕. 光学学报, 1989; 9(9): 836~842
- [4] 廖廷悌. 光学学报, 1991; 11(4): 347~352
- [5] Ohtsuka Y, Maeda K. Appl Opt, 1981; 20(20): 3562~3565
- [6] 殷宗敏. 激光, 1982; 9(2): 65~68
- [7] Rohra A. Appl Opt, 1983; 22(19): 3058~3063
- [8] 廖廷悌. 应用激光, 1988; 8(2): 80~84
- [9] 廖廷悌. 中国激光, 1989; 16(5): 267~271
- [10] 邹义榕, 廷廖悌, 林金豆. 量子电子学, 1989; 6(2): 167~172
- [11] 邹义榕. 量子电子学, 锥形发散梯度折射率纤维透镜的光束光学, 待发表
- [12] 陈智浩. 激光杂志, 1992; 13(2): 67~69

作者简介: 廖廷悌, 男, 1962年7月出生。讲师。现从事应用光学与光学设计, 梯度折射率光学, 光束光学等领域的科研和教学工作。

收稿日期: 1992年6月3日。

收到修改稿日期: 1992年8月5日。