使用李代数法计算光学系统的三级象差

丁桂林* 吕百达

（四川大学光电科学技术系，成都）

摘要：借助于李代数和辛映射推导出厚透镜成象系统的Seidel三级象差系数的解析公式。我们证明了这是普遍的表示式，通过选择合适的几何参数可用于分析薄透镜、凹面（或凸面）-平面透镜、球透镜等常用光学成象系统的象差。

Lie algebraic approach to the problem of computing the third-order aberrations of optical systems

Ding Guilin, Lü Baida

(Department of Opto-Electronic Science & Technology, Sichuan University)

Abstract: The seidel third-order aberration coefficients of a thick lens imaging system are derived analytically with the aid of Lie algebra and optical symplectic map. We have shown that the expressions obtained in this paper are general and applicable to analyzing aberrations of the conventional optical imaging systems such as thin lens, concave (or convex)-planar lens and spherical lens etc. By a suitable choice of geometrical parameters.

一、引　言

众所周知，实际光学系统的成象因会偏离近轴单色光线的理想成象位置而产生象差[1]。在光学仪器设计、列阵光学和激光核聚变系统中[2]，象差计算和补偿有重要实际意义，并已发展和完善了代数分析和光线追迹的方法[1]。随着群论在物理学中应用范围的扩大，Dragt将李群和李代数——算子法用于光学[3]，给出了李变换和辛映射的数学理论[4]，近年来，国外有关这方面的研究工作进展迅速。这一新方法计算象差的优点[5]是比其它方法简单，清楚，给出的象差系数公式相加各项有明确的物理意义，亦适用于计算机计算。本文的目的是将李代数——算子方法用于处理以厚透镜为代表的一般光学成象系统，推导出三级象差的计算公式，并对该公式的推广应用作具体讨论。

二、厚透镜成象系统的三级象差

使用李代数法计算象差的预备知识和基础理论详见文献〔3〕、〔4〕，因篇幅所限，本文从

---

* 现工作地址：商丘师专物理系。

略。按照 该理论，Seidel三级单色象差完全由函数f_4描述：

$$f_4 = A(\vec{p}^2)^2 + B\vec{p}^2(\vec{p}\cdot\vec{q}) + C(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 + D\vec{p}^2\vec{q}^2 + E(\vec{p}\cdot\vec{q})\vec{q}^2 + F(\vec{q}^2)^2 \tag{1}$$

式中，$\vec{q} = (q_x \equiv x,\ q_y \equiv y)$和$\vec{p} = (p_x,\ p_y)$为光线的位置和动量矢量；$A$，$B$，$C$，$D$，$E$为三级象差系数；相加各项分别对应于球差、慧差、象散、场弯曲和 畸变，$F(\vec{q}^2)^2$称Pocus，表示计及三级效应后对象面处光线到达方向的影响。为明确起见，本文限于讨论轴对称光学系统，在图1所示厚透镜成象系统中，设由物点O_i（物距d_1）发出的光线经过厚透镜后 成象在O_f处(象距d_2)。厚透镜二个折射球界面的曲率半径分别为R_1，R_2，厚度t，折射率n，并设物象空间折射率均为1(对物象空间折射率不相等情况不难作相应推广）。为推导出这一成象系统在象面处的三级象差公式，应使用下述光学辛映射μ的关系式：

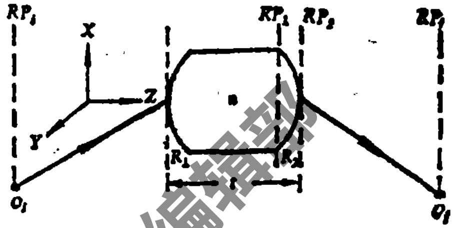

图1　由厚透镜、物距和象距组成的光学成象系统

$$\vec{w}^f = \mu\,\vec{w}^i \tag{2}$$

式中，$\vec{w}$为四维矢量，$\vec{w} = (q_x,\ q_y,\ p_x,\ p_y)$，上标$f$，$i$分别表示$\vec{w}$在$O_f$和$O_i$处的值。

利用折射率突变球界面和均匀介质的f_2，f_4表示式和 Campbell-Baker-Hausdorff (CBH)公式，进行冗长的对易计算至三级象差项为止（计算中间式太长，略去），最后将结果整理为用李算子符号“：：”表示的形式：

$$\mu = \mu_G \exp(:f_4^*:) \tag{3}$$

式中，

$$\mu_G = \exp\left\{\left(-\frac{d_1}{2}\right):\vec{p}^2:\right\}\exp\left\{a_1:\vec{q}^2:\right\}\exp\left\{\left(-\frac{t}{2n}\right):\vec{p}^2:\right\} \times \exp\left\{a_2:\vec{q}^2:\right\}\exp\left\{\left(-\frac{d_2}{2}\right):\vec{p}^2:\right\} \tag{4}$$

为辛映射的高斯部分，而

$$f_4^* = A^*(\vec{p}^2)^2 + B^*\vec{p}^2(\vec{p}\cdot\vec{q}) + C^*(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 + D^*\vec{p}^2\vec{q}^2 + E^*(\vec{p}\cdot\vec{q})\vec{q}^2 + F^*(\vec{q}^2)^2 \tag{5}$$

$$\begin{cases} A^* = A_2^* - d_2 B_2^* + d_2^2(C_2^* + D_2^*) - d_2^3 E_2^* + d_2^4 F_2^* - d_2/8 \\ B^* = B_2^* - 2d_2(C_2^* + D_2^*) + 3d_2^2 E_2^* - 4d_2^3 F_2^* \\ C^* = C_2^* - 2d_2 E_2^* + 4d_2^2 F_2^* \\ D^* = D_2^* - d_2 E_2^* + 2d_2^2 F_2^* \\ E^* = E_2^* - 4d_2 F_2^* \\ F^* = F_2^* \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} A_2^* = A_1^* \\ B_2^* = -8a_2 A_1^* + B_1^* \\ C_2^* = 16a_2^2 A_1^* - 4a_2 B_1^* + C_1^* \\ D_2^* = 8a_2^2 A_1^* - 2a_2 B_1^* + D_1^* + D_2 \\ E_2^* = -32a_2^3 A_1^* + 12a_2^2 B_1^* - 4a_2(C_1^* + D_1^*) + E_1^* + E_2 \\ F_2^* = 16a_2^4 A_1^* - 8a_2^3 B_1^* + 4a_2^2(C_1^* + D_1^*) - 2a_2 E_1^* + F_1^* + F_2 \end{cases} \tag{7}$$

$$
\begin{cases}
A_1^* = -\dfrac{d_1}{8}\left(1+2a_1\dfrac{t}{n}\right)^4+\dfrac{t^2}{n^2}D_1-\dfrac{t^3}{n^3}E_1+\dfrac{t^4}{n^4}F_1-\dfrac{t}{8n^3} \\
B_1^* = d_1\left(1+2a_1\dfrac{t}{n}\right)^3 a_1-2\dfrac{t}{n}D_1+3\dfrac{t^2}{n^2}E_1-4\dfrac{t^3}{n^3}F_1 \\
C_1^* = -2d_1\left(1+2a_1\dfrac{t}{n}\right)^2 a_1^2-2\dfrac{t}{n}E_1+4\dfrac{t^2}{n^2}F_1 \\
D_1^* = -d_1\left(1+2a_1\dfrac{t}{n}\right)^2 a_1^2+D_1-\dfrac{t}{n}E_1+2\dfrac{t^2}{n^2}F_1 \\
E_1^* = 4d_1\left(1+2a_1\dfrac{t}{n}\right)a_1^3+E_1-4\dfrac{t}{n}F_1 \\
F_1^* = -2d_1a_1^4+F_1
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
D_1 = \dfrac{n-1}{4nR_1} \\
E_1 = -\dfrac{n-1}{2R_1^2} \\
F_1 = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{8R_1^3}
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
D_2 = -\dfrac{n-1}{4nR_2} \\
E_2 = \dfrac{n-1}{2nR_2^2} \\
F_2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{8nR_2^3}
\end{cases}
\tag{10}
$$

$$
\begin{cases}
a_1 = \dfrac{n-1}{2R_1} \\
a_2 = \dfrac{1-n}{2R_2}
\end{cases}
\tag{11}
$$

符号规定为对凹形折射界面$R>0$，凸形折射界面$R<0$，平折射界面$R\to\infty$。将（7）式～（11）式代入（6）式就得到厚透镜成象系统象面处三级象差系数的显式。文中有意写为分离的形式是为说明(6)式～（8）式的物理意义，它们分别表示在图1中RP_f，RP_2和RP_1处的三级象差系数。由几何光学熟知，厚透镜代表了相当普遍的光学成象系统，我们费力推出（6）式～（8）式也正是因为在象差的李代数处理法中，如果得到了厚透镜系统的三级象差系数的公式，常见光学成象系统的象差问题均可迎刃而解，下节将对此进行具体分析。

三、推 广 应 用

1. 薄透镜

在（6）式～（8）式中令$t=0$，并对结果加以整理，得

$$
\begin{cases}
A^* = -m^4 d_1/8 + d_2^2(1+2a_2d_2)^2 D_1 - d_2^3(1+2a_2d_2)E_1 + d_2^4 F_1 \\
\qquad + d_2^2 D_2 - d_2^3 E_2 + d_2^4 F_2 - d_2/8 \\
B^* = -m^3 d_1/(2f) - 2d_2(1+2a_2d_2)^3 D_1 + d_2^2(3+8a_2d_2)E_1 - 4d_2^3 F_1 \\
\qquad - 2d_2 D_2 + 3d_2^2 E_2 - 4d_2^3 F_2 \\
C^* = -m^2 d_1/(2f^2) + 8a_2d_2(1+2a_2d_2)D_1 - 2d_2(1+4a_2d_2)E_1 + 4d_2^2 F_1 \\
\qquad - 2d_2 E_2 + 4d_2^2 F_2 \\
D^* = -m^2 d_1/(4f^2) + D_1 + 4a_2d_2(1+2a_2d_2)D_1 - d_2(1+2a_2d_2)E_1 \\
\qquad + 2d_2^2 F_1 + D_2 - d_2 E_2 + 2d_2^2 F_2 \\
E^* = -md_1/(2f^3) - 4a_2(1+4a_2d_2)D_1 + (1+8a_2d_2)E_1 - 4d_2F_1 + E_2 - 4d_2F_2 \\
F^* = -d_1/(8f^4) + 4a_2^2 D_1 - 2a_2E_1 + F_1 + F_2
\end{cases}
\tag{12}
$$

式中

$$m = 1 + 2d_2(a_1 + a_2) \tag{13}$$

$$f = -\frac{1}{2(a_1 + a_2)} \tag{14}$$

分别为薄透镜的横向放大率和焦距，而物距、象距d_1，d_2满足高斯成象关系

$$d_1(1+2a_2d_2) + d_2(1+2a_1d_1) = 0 \tag{15}$$

2. 凸-平（$R_1<0$）、凹-平（$R_1>0$）型透镜

在（6）式～（8）式中令$R_2\to\infty$，得到

$$
\begin{cases}
A^* = -m^4 d_1/8 + \left(d_2+\frac{t}{n}\right)^2 D_1 - \left(d_2+\frac{t}{n}\right)^3 E_1 + \left(d_2+\frac{t}{n}\right)^4 F_1 - \left(d_2+\frac{t}{n^3}\right)/8 \\
B^* = -m^3 d_1/(2f) - 2\left(d_2+\frac{t}{n}\right) D_1 + 3\left(d_2+\frac{t}{n}\right)^2 E_1 - 4\left(d_2+\frac{t}{n}\right)^3 F_1 \\
C^* = -m^2 d_1/(2f^2) - 2\left(d_2+\frac{t}{n}\right) E_1 + 4\left(d_2+\frac{t}{n}\right)^2 F_1 \\
D^* = -m^2 d_1/(4f^2) + D_1 - \left(d_2+\frac{t}{n}\right) E_1 + 2\left(d_2+\frac{t}{n}\right)^2 F_1 \\
E^* = -md_1/(2f^3) + E_1 - 4\left(d_2+\frac{t}{n}\right) F_1 \\
F^* = -d_1/(8f^4) + F_1
\end{cases}
\tag{16}
$$

式中

$$m = 1 + 2a_1\left(d_2 + \frac{t}{n}\right) \tag{17}$$

$$f = -\frac{1}{2a_1} \tag{18}$$

分别为凸/凹-平型透镜的横向放大率和焦距。d_1，d_2满足成象关系

$$(1+2a_1d_1)\left(d_2+\frac{t}{n}\right) + d_1 = 0 \tag{19}$$

3. 平-凸/凹型透镜

在（6）式～（8）式中令$R_1\to\infty$即得，易证这正是文献〔3〕中（5·17）式，在本文中，它是作为厚透镜象差公式的特例而得出的。

4.球透镜

在(6)式～(8)式中令 $-R_1=R_2=t/2=R$ $(R>0)$，就得到球透镜的三级象差系数公式。

5.反射成象系统

计算表明，只需令反射空间折射率等于入射空间折射率的负值，就可由对应的折射系统的三级象差系数公式推导出反射系统的三级象差系数。

四、讨　　论

1.分析前二节所得公式知，使用李代数方法可将光学成象系统的三级象差系数写为物理意义十分明确的解析表示式。象差系数公式中相加各项代表某一单元或者某些单元对象差的贡献，这便于在光学设计中通过选择成象元件合适的几何参数（例如薄透镜的焦距、非球面度等）、物象距和对系统提出某种对称性要求以使某一或某些象差项小于设计要求值，实现消除或控制某些象差的目的。由象差系数公式还可求出某些系数间的关系，例如对薄透镜，由(12)式

$$2D^*-C^*=2(D_1+D_2)=\frac{(n-1)}{2n}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{20}$$

这表明 $2D^*-C^*$ 是仅与 R_1，R_2，n 有关的量。

2.在节三中仅举出了厚透镜象差公式的一些典型应用，显然远不止此。例如，亦可用于惠更斯目镜、冉斯登目镜、多透镜组等光学系统象差的计算。使用CBH公式，手算至五级象差系数是不困难的，对更高级的象差，为避免人为计算错误，可借助计算机进行，因此，李代数法不失为光学设计中象差计算和分析的一种新的有效的方法。

3.值得指出的是使用李算子表示将近轴高斯光学（用 $:f_2:$ 描述，借助于辛映射（2）式可写为矩阵形式）与非近轴问题统一处理，象差公式用正则变量 $\vec{p}$，$\vec{q}$ 的乘幂形式统一写出，这一优点是其它方法所不能相比的，可以期望它在光学、激光技术中有更为广泛的用途，我们研究象差的目的也正在于此，并已将本文所得结果用于分析失调激光系统和光学列阵的高级象差，有关结果将另文报道。

感谢河南省教委对本课题的资助。

参 考 文 献

〔1〕 Born M, Wolf E. Principles of Optics. Oxford-London, Edinburgh-New York, Paris-Frankfeert: Pergamon Press, 1964: 203～232

〔2〕 范滇元. 激光与红外, 1991; 21 (2): 12～17

〔3〕 Dragt A J. L O S A, 1982; 72 (3): 372～379

〔4〕 Dragt A J, Finn M. J Math Phys, 1976; 17 (12): 2215～2227

〔5〕 王绍民. 应用激光, 1983; 3 (4): 29～32

*　　*　　*

作者简介：丁桂林，男，1957年出生。硕士，讲师。现从事光学教学与科研工作。

吕百达，请参见本刊1987年，第11卷，第4期，第33页。

收稿日期：1991年8月7日。