单光子激光中的原子合作效应

胡响明

(华中师范大学应用物理研究所，武汉)

摘要：本文采用Huang和Mandel推导的激光场约化密度矩阵主方程和P表示分布函数研究原子相互作用在单光子激光光子统计和线宽两方面的合作效应。除得到在光子统计方面与Zubairy一致的结论外，还获得在激光线宽方面原子相互作用参数没有明显贡献的结论。

Cooperative effect of atomic interactions in a single-photon laser

Hu Xiangming

(Institute of Applied Physics, Huazhong Normal University)

Abstract: The influence of cooperative effect of atomic interactions on photon statisties and linewidth of a single-photon laser has been investigated by means of a motion equation of the reduced-density operator matrix of the laser field derived by Huang and Mandel and the P representative distribution function.

一、引 言

Zubairy [1] 研究表明，单光子激光稳态平均光子数几乎不受原子相互作用参数D的影响，但当$D\gtrsim BC/(A-C)$时D对光强起伏的作用明显，不过没有讨论对激光线宽的贡献。采用的反常序分布函数正好满足Fokker-Planck方程，而且精确地求解了该方程，写出了光强和光强起伏的精确解析形式，但最后结果仍然要采用近似处理才能分析其物理实质。本文采用P表示 [2] 分析平均光强、光强起伏和激光线宽对原子相互作用参数D的依赖性。虽然一开始建立Fokker-Planck方程就采用近似处理，这是完全允许的，根本不影响物理实质。

二、激光的Fokker-Planck方程

采用光场与全同二能级原子耦合系统的激光模型。假定t_2时刻N_2个被泵浦到上能级的原子在原子有效寿命T_2内与光场发生相互作用后在t_2+T_2时刻被移去，其间它们对光场作出总贡献。如Scully-Lamb理论 [3] 所表明的，腔损耗是由一个初始处于低能级的N_1个二能级原子加以描述，它们在另一个有效寿命T_1内从光场吸收能量跃迁到上能级。约化密度矩阵ρ的主方程中增益系数A正比于上能级原子的泵浦速率R_2，衰减系数C正比于低能级原子的注入速率R_1。增益计及到耦合常数f的四次幂，保证稳态所必需的本质的非线性，激光工作

在阈值以上足够远但不是太远保证四阶理论成立，损耗计及到f的二阶，正比于光强。主方程为[4]

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho} = {} & \varepsilon(a^+\rho - \rho a^+ - a\rho + \rho a) \\
& - \frac{1}{2}A(aa^+\rho + \rho aa^+ - 2a^+\rho a) \\
& - \frac{1}{2}C(a^+a\rho + \rho a^+a - 2a\rho a^+) \\
& - \frac{1}{8}B(aa^+aa^+\rho + \rho aa^+aa^+ + 6aa^+\rho aa^+ \\
& \quad - 4a^+\rho aa^+a - 4a^+aa^+\rho a) \\
& - \frac{1}{8}D(aa^+aa^+\rho + \rho aa^+aa^+ + 6aa^+\rho aa^+ \\
& \quad - 4a^+\rho aa^+a - 4a^+aa^+\rho a + 2a^2a^{+2}\rho + 2\rho a^2a^{+2} \\
& \quad + 12a^{+2}\rho a^2 - 8a^+\rho a^2a^+ - 8aa^{+2}\rho a)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中，a, a^+是光场的湮灭、产生算符。增益、自饱和、损耗以及原子相互作用参数分别为：

$$A = (fT_2)^2 R_2 \sum_{i=1}^{N_2} \left|U(\vec{r}_i)\right|^2 \tag{2a}$$

$$B = \frac{1}{3}(fT_2)^4 R_2 \sum_{i=1}^{N_2} \left|U(\vec{r}_i)\right|^4 \tag{2b}$$

$$C = (fT_1)^2 R_1 \sum_{i=1}^{N_1} \left|U(\vec{r}_i)\right|^2 \tag{2c}$$

$$D = \frac{1}{3}(fT_2)^4 R_2 \sum_{i=1, i\neq k}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \left|U(\vec{r}_i)\right|^2 \left|U(\vec{r}_k)\right|^2 \tag{2d}$$

式中，$U(\vec{r}_i)$是场在第i个原子处的模函数，f是场与原子相互作用系数。而且，这里引入了小的注入信号，ε是描述注入信号的系数，

$$\varepsilon = fT_2R_2 \sum_{i=1}^{N_2} \left|U(\vec{r}_i)\right|^2 \tag{2e}$$

利用下述关系及其共轭

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha, t)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3a}$$

$$a|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3b}$$

$$a^+|\alpha\rangle\langle\alpha| = (\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha})|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3c}$$

$$\int d^2\alpha P f(\alpha,\ \alpha^*)\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha| = -\int d^2\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Pf)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3d}$$

$$\int d^2\alpha P g(\alpha,\ \alpha^*)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \int d^2\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(Pg)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3e}$$

$$\int d^2\alpha P h(\alpha,\ \alpha^*)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \int d^2\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}(Ph)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3f}$$

$$aa^+ = a^+a + 1 \tag{4a}$$

$$aa^+aa^+ = a^{+2}a^2 + 3a^+a + 1 \tag{4b}$$

$$aa^+a = a^+a^2 + a \tag{4c}$$

$$a^2a^{+2} = a^{+2}a^2 + 4a^+a + 2 \tag{4d}$$

$$a^2a^+ = a^+a^2 + 2a \tag{4e}$$

进行计算。非微分项全部抵消，略去含B和D的三次微分项以及更高次微分项，因为它们与二次微分项相比较具有稳态平均光子数的倒数的数量级，故可略。最后得到Fokker-Planck方程

$$\begin{aligned}\dot P(\alpha,\ t) = &-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\varepsilon + \left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}-\frac{B}{2}|\alpha|^2-\frac{7B}{8}+\frac{D}{8}\right)\alpha\right]P\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(-\frac{3B}{4}+\frac{3D}{4}\right)\alpha^2P\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\left(A-\frac{5B}{4}|\alpha|^2+\frac{3D}{4}|\alpha|^2-B+D\right)P\\ &+c.c.\end{aligned} \tag{5}$$

式中，$c.c.$为复共轭。

三、统计性质对D的依赖性

由方程（5），漂移项为零决定稳态平均光子数$\bar n_{ss}$，无需求解Fokker-Planck方程，因为扩散项是漂移项的$\bar n_{ss}^{-1}$的量级，由于$A\gg B$，$A\gg D$，故连同漂移项中最后两项都可以略去，且认为注入信号很小，则有

$$\bar n_{ss} = (A-C)/B \tag{6}$$

这正是文献〔1〕的结果。

利用极坐标转换可以求得激光线宽。令

$$\alpha = re^{i\theta}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}e^{-i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

利用上两式及其共轭，方程（5）变为

$$\dot P(r,\ \theta,\ t) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\varepsilon + \left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}-\frac{B}{2}r^2\right)r\right]P$$

$$-\frac{i}{2r}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\varepsilon+(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}-\frac{B}{2}r^2)r\right]e^{i\theta}P$$

$$+\frac{i}{2r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\varepsilon+(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}-\frac{B}{2}r^2)r\right]e^{-i\theta}P$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(S+2\chi)r^2P+\frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}(S+6\chi)r^2P$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(S-2\chi)P \tag{7}$$

式中，

$$S=\frac{A}{\bar{n}_{ss}}-\frac{5}{4}B+\frac{3}{4}D \tag{8a}$$

$$2\chi=-\frac{3}{4}B+\frac{3}{4}D \tag{8b}$$

激光线宽

$$D(\theta)=\frac{1}{2}(S-2\chi)=\frac{A}{2\bar{n}_{ss}}-\frac{B}{4}+\frac{D-B}{2\bar{n}_{ss}} \tag{9a}$$

因为$A\gg B$，$A\gg D$

（9a）式即为

$$D(\theta)=\frac{A}{2\bar{n}_{ss}}-\frac{B}{4} \tag{9b}$$

事实上，从反常序分布函数$\Phi(v,v^*,t)$服从的Fokker-Planck方程[1]遵循上述同样的做法得到与（9b）完全一致的结果。

可以看出，激光线宽和稳态平均光子数一样，并不因为D的存在而有什么明显的影响。

对于光强起伏，可以采取线性分析法[5,6]，起伏项是漂移项的$\bar{n}_{ss}^{-1}$量级。由于引入了一个小的注入信号，就可避免下面遇到的发散问题。这样一个小的注入信号不会显著改变激光决定性分布曲线，只是允许较低分支取非零值，稍稍降低阈值[6,7]。

由方程（5），忽略起伏得决定性方程：

$$\dot{\alpha}=\varepsilon-\alpha f(I)\qquad I=|\alpha|^2 \tag{10a}$$

$$f(I)=-\frac{A}{2}+\frac{C}{2}+\frac{B}{2}I \tag{10b}$$

稳态时

$$\varepsilon=\alpha f(I) \tag{11}$$

态方程的稳定性由标准线性化过程确定，令

$$\alpha=\alpha_0+\delta\alpha,\quad I=|\alpha_0|^2$$

于是

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta\alpha\\ \delta\alpha^*\end{pmatrix}=-\underline{A}(\alpha_0)\begin{pmatrix}\delta\alpha\\ \delta\alpha^*\end{pmatrix} \tag{12a}$$

$$\underline{A}(\alpha_0)=\begin{pmatrix} f+If' & \alpha^2 f' \\ \alpha^{*2} f' & f+If' \end{pmatrix} \tag{12b}$$

稳态条件是

$$\mathrm{Tr}\underline{A}=f(I)+If'(I)>0 \tag{13a}$$

$$\det\underline{A}=f(I)[2f'(I)+f(I)]>0 \tag{13b}$$

考虑起伏时，方程（12a）写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\alpha \\ \delta\alpha^*\end{pmatrix}=-\underline{A}\begin{pmatrix}\delta\alpha \\ \delta\alpha^*\end{pmatrix}+\underline{D}^{\frac{1}{2}}(\alpha_0)\mu_i(t) \tag{14a}$$

$$\underline{A}(\alpha_0)=\begin{pmatrix} -A & B\alpha_0{}^2 \\ B\alpha_0{}^{*2} & -A \end{pmatrix}, \tag{14b}$$

$$-A=If'(I)+f(I),\quad B=f'(I)$$

$$\underline{D}(\alpha_0)=\begin{pmatrix} 2\chi\alpha_0{}^2 & S|\alpha_0|^2 \\ S|\alpha_0|^2 & 2\chi\alpha_0{}^{*2} \end{pmatrix}$$

μ_i是δ关联高斯随机函数，$\underline{A}$是线性漂移矩阵，$\underline{D}$是α_0处的扩散矩阵，S和2χ仅是I的函数。关联矩阵[6,8,9]

$$\underline{C}=\begin{bmatrix}\langle(\delta\alpha)^2\rangle & \langle\delta\alpha^*\delta\alpha\rangle \\ \langle\delta\alpha\delta\alpha^*\rangle & \langle(\delta\alpha^*)^2\rangle\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\langle a^2\rangle-\langle a\rangle^2 & \langle a^+v\rangle-|\langle a\rangle|^2 \\ \langle a^+a\rangle-|\langle a\rangle|^2 & \langle a^{+2}\rangle-\langle a^+\rangle^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\underline{D}\det\underline{A}-(\underline{A}-\underline{I}\,\mathrm{Tr}\,\underline{A})\underline{D}(\underline{A}^T-\underline{I}\,\mathrm{Tr}\,\underline{A})}{2\mathrm{Tr}\,\underline{A}\det\underline{A}}$$

$$=\frac{1}{2\det\underline{A}}\begin{bmatrix}(-2\chi A-BSI)\alpha_0{}^2 & -SIA-2\chi BI^2 \\ -SIA-2\chi BI^2 & (-2\chi A-BSI)\alpha_0{}^{*2}\end{bmatrix} \tag{15}$$

因注入信号很小以致趋于零但不等于零，计到一阶，强度起伏

$$g^2(0)-1=\frac{2}{I}\left[<\delta\alpha^*\delta\alpha>+\mathrm{Re}\left[\alpha_0{}^*\frac{<(\delta\alpha)^2>}{\alpha_0}\right]\right]$$

$$=\frac{S-2\chi}{f+2If'}$$

$$=\frac{1}{B\,n_{ss}}\left[\frac{A}{n_{ss}}-2B+\frac{3}{2}D\right]$$

因为$A\sim C$

故

$$g^2(0)-1=\frac{BC}{(A-C)^2}+\frac{3D}{2(A-C)} \tag{16}$$

这正是Zubairy[1]的结果。

四、结　　论

本文从稳态平均光子数，激光线宽和光强起伏三个方面全面地分析了激光对原子相互作用参数D的依赖性。稳态平均光子数和线宽均与参数D无关，只有光强起伏当$D\gtrsim BC/(A-C)$时依赖于参数D。

参 考 文 献

〔1〕 Zubairy M S. Phys Rev, 1979; A20: 2464
〔2〕 Glauber R J. Phys Rev, 1963; 131: 2766
〔3〕 Scully M O, Lamb Jr W E. Phys Rev, 1967; 159: 208
〔4〕 Huang C Y, Mandel L. Phys Rev, 1978; A18: 644
〔5〕 Reid M D, Walls D F. Phys Rev, 1983; A28: 322
〔6〕 Drummond P D, Walls D F. J Phys, 1980; A13: 725
〔7〕 Reid M D, McNeil K J, Walls D F. Phys Rev, 1981; A24: 2029
〔8〕 Arnold L. Stochastic differential equations. New York: Wiley, 1974
〔9〕 Chaturvedi S, Gardinar C W, Matheson I *et al*. J Stat Phys, 1977; 17: 469

*　　*　　*

作者简介：胡响明，男，1963年出生。硕士。现在该校应用物理研究所工作。

收稿日期：1991年2月2日。　　收到修改稿日期：1991年10月15日。

·简　　讯·

激光二极管泵浦的激光器作首次军事飞行

美国弗吉尼亚州麦克莱恩的麦克唐纳·道格拉斯电子系统公司把一种激光二极管泵浦的固体激光技术引入军工市场。这种激光系统是首次被选为军工生产项目的，可用于一种更可靠、更有效、更紧凑和更轻便的测距机中，该测距机用来校准目标距离，然后提供给武器制导系统。

这种测距机于1990年1月开始在F/A-18型战斗机上进行飞行测试，1991年春季投入生产。激光二极管阵列采用空气冷却，而激光系统工作波长为1.064μm或0.532μm，脉宽9～30ns，每脉冲能量可达200mJ，工作温度为－35℃～＋65℃。在20Hz点火时要求200W的功率，整个装置只有3300～6600cm³（200～400in³），重量4.5～6.9kg（10～15 lb）。

译自Photonics Spectro, 1991 (Aug): 103　　孙桂林　译　　巩马理　校