

# 物理光学方法分析Moire偏折法

王海林 苗鹏程 阎大鹏 贺安之

(华东工学院应用物理系, 南京)

**摘要:** 本文在物理光学领域里, 严格分析了Moire偏折法的测试原理和特性, 获得了一些关于Moire偏折法的新的和严格的结论。实验证实了本文的结论。

## An analysis of Moire deflectometry by physical optics method

Wang Hailin, Miao Pengchen, Yan Dapeng, He Anzhi

(Department of Applied Physics, East China Institute of Technology)

**Abstract:** In this paper, the operating principle and characteristic of Moire deflectometry are analysed strictly on the basis of physical optics method, some new and strict conclusions about Moire deflectometry are obtained. The conclusions are confirmed by experimental results.

### 一、引 言

本文在物理光学领域里, 严格分析了Moire偏折法 (MD)<sup>[1~3]</sup>的测试原理和特性。从分析过程中可以发现, 过去一些文献中<sup>[1~5]</sup>主要用几何光学方法分析所获得的一些关于MD的结论有很大的局限性, 它们不能严格和全面地反映MD的特性。通过本文的分析, 我们获得了关于MD的一些新的和严格的结论。

1. Moire条纹的偏离量反映被测波阵面函数对某坐标的一阶偏导数。
2. MD最适合检测波阵面函数满足对某坐标的二阶偏导数为零或为常数的波阵面。这种情况存在一些平面, 当第二块光栅与这些平面重合时, Moire条纹对比度很好。
3. 在一般情况下 (波阵面函数对某坐标的二阶偏导数还为坐标的函数), 第二块光栅不管放置在什么位置, 都会出现Moire条纹局部对比度变差的现象。
4. 在一般情况下, 当两光栅之间的间距比较小时, Moire条纹局部对比度变差可以忽略, MD还是很适用的。但当两光栅之间的间距较大时, 出现局部Moire条纹对比度为零, MD不能使用。
5. 在一般情况下, 在一定条件下, MD中两光栅之间允许的最大间距由被测波阵面函数对某坐标的二阶偏导数的最大值和最小值之差决定。
6. 在一定条件下, MD的最大检测灵敏度由被测波阵面函数的性质决定。
7. 望远镜缩束装置的引入, 不能提高MD的最大检测灵敏度, 只能增加一个改变检测灵敏度的手段, 但能使被测对象与观察屏为物象共轭关系, 使MD能进行大口径、远距离测量。

## 二、Moire偏折法光路

由于通常的MD测试系统中,无法使物和象为共轭关系,当被测物体较远时,自身的衍射干扰很严重。我们使用的光路如图1所示。此光路中,通过透镜 $L_1$ 和 $L_2$ 组成的望远镜系统使被测相位物体PO与观察屏(毛玻璃)P为物象共轭关系。我们用此系统对10m远处的酒精灯火焰场进行了测量,结果如图2所示。图1的光路在文献〔1,5〕中使用过,但只为了改变检测灵敏度。实验中,通过调节 $G_1$ 的位置,来改变两光栅之间的间距 $\Delta$ ,即调节 $G_2$ 的位置。

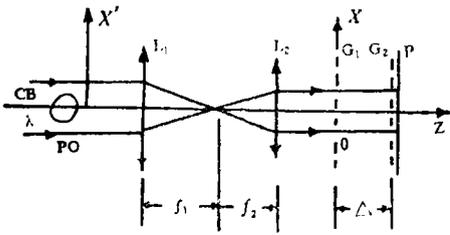


图1 Moire偏折法光路图

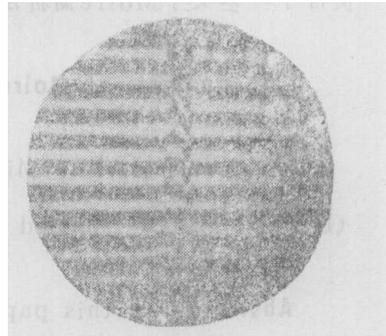


图2 酒精灯火焰场Moire条纹图

按图1中的坐标系,周期为 $d$ 的光栅 $G_1$ 和 $G_2$ 分别位于平面 $Z=0$ 和 $Z=\Delta$ 上。 $P$ 紧贴在 $G_2$ 的右表面。设波长为 $\lambda$ 的准直光波CB刚刚通过PO后的复振幅(忽略常数项)为

$$V'(x', y') = \exp [i(2\pi/\lambda)\varphi'(x', y')] \quad (1)$$

由于PO与平面 $Z=\Delta$ 为物象共轭关系,如没有光栅,光波在平面 $Z=\Delta$ 上的复振幅为

$$V(x, y) = \exp [i(2\pi/\lambda)\varphi(x, y)] \quad (2)$$

式中, $\varphi(x, y) = \varphi'(x', y')$ ;  $x = x'/M$ ,  $y = y'/M$ ;  $M = f_1/f_2$ ,  $f_1$ 和 $f_2$ 分别为 $L_1$ 和 $L_2$ 的焦距。

## 三、理论推导Moire条纹强度分布

设 $G_1$ 的栅线与 $X$ 轴垂直,用频谱表示的透射系数为

$$t_1(x) = \sum_{(n)} C_n \exp(i2\pi\xi_n x) \quad (3)$$

式中, $\xi_n = n/d$ 为 $G_1$ 的谐频; $C_n$ 为 $G_1$ 的Fourier系数。

设准直光通过PO、 $L_1$ 和 $L_2$ 后在 $G_1$ 左表面上的复振幅为 $u(x, y, 0-)$  (“-”表示左表面,“+”表示右表面),则 $G_1$ 右表面的复振幅为

$$u(x, y, 0+) = u(x, y, 0-) \sum_{(n)} C_n \exp(i2\pi\xi_n x) \quad (4)$$

对(4)式进行Fourier变换,得平面涉谱为

$$\tilde{u}(\xi, \zeta, 0+) = \sum_{(n)} C_n \tilde{u}(\xi - \xi_n, \zeta, 0-) \quad (5)$$

由平面波谱的传播公式,得在平面 $Z=\Delta-$ 上

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\xi, \zeta, \Delta-) &= \tilde{u}(\xi, \zeta, 0+) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \sqrt{1 - \lambda^2 (\xi^2 + \zeta^2)} \right] \\
 &\approx \sum_{(n)} C_n \tilde{u}(\xi - \xi_n, \zeta, 0-) \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2} (\xi^2 + \zeta^2) \right] \right\} \\
 &= \sum_{(n)} C_n \tilde{u}(\xi - \xi_n, \zeta, 0-) \exp \left( i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2} [(\xi - \xi_n)^2 + \zeta^2] \right\} \right) \\
 &\quad \exp(i\pi\lambda\Delta\xi_n^2) \exp(-i2\pi\lambda\Delta\xi\xi_n) \\
 &\approx \sum_{(n)} C_n \tilde{V}(\xi - \xi_n, \zeta) \exp(i\pi\lambda\Delta\xi_n^2) \exp(-i2\pi\lambda\Delta\xi\xi_n) \quad (6)
 \end{aligned}$$

(6) 式的推导过程中使用了对根号项的二项式展开, 取前两项为近似。对变化不很快的波阵面, 这种近似引起的误差是很小的。

对(6)式进行逆Fourier变换, 得平面 $Z = \Delta -$ 上光波复振幅为

$$u(x, y, \Delta-) = \sum_{(n)} C_n \exp(-i\pi\lambda\Delta\xi_n^2) \exp(i2\pi\xi_n x) V(x - \lambda\Delta\xi_n, y) \quad (7)$$

把(2)式代入(7)式得

$$u(x, y, \Delta-) = \sum_{(n)} C_n \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ -\frac{\lambda^2 \Delta}{2} \xi_n^2 + \lambda \xi_n x + \varphi(x - \lambda\Delta\xi_n, y) \right] \right\} \quad (8)$$

设 $G_1$ 为正弦光栅, 即 $t_1(x) = 1 + \cos 2\pi(x/d)$ , 这样有 $C_0 = 1, C_1 = C_{-1} = 1/2$ , 代入(8)式得平面 $Z = \Delta -$ 上光强分布为

$$\begin{aligned}
 I(x, y, \Delta-) &= u(x, y, \Delta-) u^*(x, y, \Delta-) \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\lambda^2 \Delta}{2d^2} - \frac{\lambda}{d} x + \varphi(x, y) - \varphi(x - \frac{\lambda\Delta}{d}, y) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left[ -\frac{\lambda^2 \Delta}{2d^2} - \frac{\lambda}{d} x + \varphi(x + \frac{\lambda\Delta}{d}, y) - \varphi(x, y) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left[ -2 \frac{\lambda}{d} x + \varphi(x + \frac{\lambda\Delta}{d}, y) - \varphi(x - \frac{\lambda\Delta}{d}, y) \right] \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

如 $\lambda\Delta/d$ 是一个比较小的量, 对(9)式中的函数 $\varphi(x \pm \lambda\Delta/d, y)$ 进行泰勒级数展开, 取前三项, 代入(9)式, 整理得

$$\begin{aligned}
 I(x, y, \Delta-) &\approx \frac{3}{2} + 2 \cos 2\pi \left[ -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \frac{\lambda\Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda\Delta}{2d^2} \right] \cos 2\pi \left[ -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \frac{\Delta}{d} + \frac{x}{d} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos 2\pi \left[ -2 \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \frac{\Delta}{d} + 2 \frac{x}{d} \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

设 $G_2$ 也为正弦光栅, 透射系数为

$$t_2(x, y) = 1 + \cos 2\pi \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{d} \quad (11)$$

式中,  $\theta$ 为 $G_2$ 的栅线与Y轴的夹角。在图1中Y轴垂直纸面指向读者。由(10)式和(11)式得平面 $Z = \Delta$ , 即观察屏P上光强分布为

$$I(x, y, \Delta) = \cos 2\pi \left[ -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \frac{\lambda \Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda \Delta}{2d^2} \right] \cos 2\pi \left[ -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \frac{\Delta}{d} + \frac{x(1 - \cos \theta) + y \sin \theta}{d} \right] + I_1(x, y) \quad (12)$$

(12)式中 $I_1(x, y)$ 包括所有常数项和空间频率约等于或大于光栅空间频率的项。(12)式右边第一项空间频率较小, 描述Moire条纹。而 $I_1(x, y)$ 在对Moire条纹观察时作为背景而存在<sup>[6]</sup>。所以, Moire条纹的强度分布为

$$I_2(x, y) = \cos 2\pi \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\lambda \Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda \Delta}{2d^2} \right) \cos 2\pi \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta}{d} + \frac{x(1 - \cos \theta) - y \sin \theta}{d} \right] \quad (13)$$

下面对(13)式进行讨论。

#### 四、Moire 条纹方程

$$\cos 2\pi \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\lambda \Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda \Delta}{2d^2} \right) = \mu \quad (14)$$

从(13)式可看出, Moire条纹(亮纹)方程为

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta}{d} + \frac{x(1 - \cos \theta) - y \sin \theta}{d} = P + \begin{cases} 0 & (\mu = 1) \\ 1/2 & (\mu = -1), \end{cases} \quad \text{即}$$

$$y = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta}{\sin \theta} - \frac{Pd}{\sin \theta} - \begin{cases} 0 & (\mu = 0) \\ d/2\sin \theta & (\mu = -1), \end{cases}$$

$$P = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

如无PO, 即 $\varphi = 0$ , Moire条纹为一组平行等间距的条纹, 条纹在Y轴上的周期为

$$D = d/\sin \theta \quad (16)$$

在实际测量中, 此条纹为参考条纹。当有PO时, Moire条纹发生偏离, 偏离量为

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta}{\sin \theta} \quad (17)$$

所以, MD直接测量的物理量为波阵面函数对与 $G_1$ 栅线垂直的坐标轴的坐标的一阶偏导数。

#### 五、Moire条纹对比度和两光栅之间的最大间距

如不考虑(12)式中的 $I_1(x, y)$ , 从(13)式得, Moire条纹的对比度由(14)式决定。当 $\mu = \pm 1$ 时, 对比度最好; 当 $\mu = 0$ 时, 对比度为零。

(1) 如 $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ , 由(14)式, 当 $\Delta$ 满足

$$\Delta = md^2/\lambda = m\Delta_1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{时} \quad (18)$$

$\mu = \pm 1$ ,  $\Delta_1 = d^2/\lambda$ 为Talbot距离。所以在此情况下, 当 $G_2$ 位于一些平面 $Z = \Delta$  ( $\Delta$ 满足(18)式)上, Moire条纹对比度很好。这些平面之间是等间距的。

(2) 如  $\partial^2\varphi/\partial x^2 = b$ , ( $b$  为不等于零的常数), 由 (14) 式, 当  $\Delta$  满足

$$-b\Delta^2 + \Delta = m\lambda, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$\mu = \pm 1$ , 所以此情况存在一些平面  $Z = \Delta$  ( $\Delta$  满足 (19) 式), 当  $G_2$  位于这些平面上, Moire 条纹对比度最好。这些平面之间是不等间距的。

以上两种情况对应的光波的波阵面函数为  $\varphi(x, y) = ax + f(y)$  和  $\varphi(x, y) = (b/2)x^2 + f(y)$ , ( $a, b$  为常数,  $f(y)$  为任意函数)。平面, 球面, 抛物面光波属于它们的特殊情况。MD 很适合对这两类波阵面进行测量。

(3) 如  $\partial^2\varphi/\partial x^2$  为坐标的函数, 不可能象上面那样由 (14) 式得出一些平面。而是不管  $G_2$  放在什么位置, 所得 Moire 条纹都会出现对比度局部较差的现象。

如  $\partial^2\varphi/\partial x^2$  的最大值和最小值分别为  $(\partial^2\varphi/\partial x^2)_{\max}$  和  $(\partial^2\varphi/\partial x^2)_{\min}$ , 由 (14) 式, 令

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\max} \frac{\lambda\Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda\Delta}{2d^2} = \frac{m_1}{2}, \quad (20)$$

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\min} \frac{\lambda\Delta^2}{2d^2} + \frac{\lambda\Delta}{2d^2} = \frac{m_2}{2}, \quad (21)$$

由 (20)、(21) 两式得

$$\left| \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\max} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\min} \right| \frac{\lambda\Delta^2}{d^2} = |m_1 - m_2| \quad (22)$$

显然, 当  $|m_1 - m_2| \ll 1$  时, 即两光栅之间的距离比较小时, 存在一些平面, 当  $G_2$  位于这些平面上时, Moire 条纹对比度局部较差完全可以忽略。

当  $|m_1 - m_2|$  小于 1 但接近 1 时, Moire 条纹出现明显的局部不清楚, 在测量中还是允许的, 如图 3a 所示, 波阵面函数  $\varphi(x, y)$  由准直光通过酒精灯火焰场产生。

当  $|m_1 - m_2| > 1$  时, Moire 出现局部对比度为零, MD 不能使用, 如图 3b 所示。

所以, 两光栅之间的最大距离必须满足  $|m_1 - m_2| = 1$ , 即

$$\Delta_{\max} = d / \sqrt{\lambda \left| \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\max} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\min} \right|} \quad (23)$$

由 (23) 式得, 在 MD 中, 当光栅周期  $d$  一定后, 限制两光栅之间距离的根本原因是被测波阵面函数的二阶偏导数的最大值和最小值之差。这里要特别强调一点, 就是要 (23) 式成立,  $\Delta_{\max}$  必须满足  $\lambda\Delta_{\max}/d$  是一个较小的量。使 (9) 式过渡到 (10) 式不会产生较大的误差, 否则两光栅之间的最大距离由允许  $\lambda\Delta/d$  是多大的数量级决定。为讨论方便, 本文假设前者成立。

## 六、MD 的检测灵敏度

本文定义 Moire 条纹偏离的条纹数  $n$  为 MD 的检测灵敏度。由 (6)、(7) 两式得

$$n = h/D = (\partial\varphi/\partial x)(\Delta/d) \quad (24)$$

所以可通过调节  $\Delta$  和  $d$  来改变 MD 的检测灵敏度。把 (23)



图3 酒精灯火焰场 Moire 条纹图

a— $\Delta < \Delta_{\max}$     b— $\Delta > \Delta_{\max}$

式代入 (24) 式得

$$n_{max} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ 1 / \sqrt{\lambda \left| \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{max} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{min} \right|} \right] \quad (25)$$

所以MD的最大检测灵敏度由被测波阵面函数的性质决定。

### 七、物象放大率M对灵敏度的影响

由 (1)、(2) 两式的关系, 从 (24) 式得

$$n = \frac{\partial \varphi'(x', y')}{\partial x} \frac{\Delta}{d} = M \frac{\partial \varphi'(x', y')}{\partial x'} \frac{\Delta}{d} = M n' \quad (26)$$

式中,  $n'$  为没有缩束时MD的检测灵敏度, 可见, 缩束系统的引入, 使MD的检测灵敏度由调节  $M$ 、 $\Delta$  和  $d$  三个量来改变。同样的方法由 (25) 式得

$$n_{max} = n'_{max} \quad (27)$$

所以望远镜缩束系统的引入没有增加MD的最大检测灵敏度。

从上面的讨论我们还可看出, 在MD中, 使用高密度光栅比使用低密度光栅结构紧凑些, 其它没有什么区别。

### 参 考 文 献

- [1] Kafri O, Glatt I. Opt Engng, 1985; 24(6): 944
- [2] Nakano Y, Murata K. Appl Opt, 1984; 23(14): 2296
- [3] 巫晒秀, 胡永珠, 朱理 *et al.* 应用光学, 1986; (6): 64
- [4] Ezra Bar-Ziv. J O S A, 1985; 2(3): 371
- [5] Kafri O, Krasinski J. Appl Opt, 1985; 24(17): 2746
- [6] Keren E. Appl Opt, 1985; 24(18): 3029

收稿日期: 1990年12月14日。

· 产品简讯 ·

### 激光二极管系统

由英国Vector技术公司提供的 $\beta$ TX激光二极管系统是一种高性能系统, 包括可见或红外激光二极管、光学系统和驱动电路。其尺寸为长75mm, 直径15mm。该公司称,  $\beta$ TX系统的先进电路, 可模拟或数字式调制到50MHz以上。其它特点还包括极性反向保护装置、在线校准、联锁装置和TTL等。

译自 L F World, 1991; 27 (8): 157 祖兰 译 马理 校

· 书 讯 ·

### 激光二极管

Anritsu技术评论第12期介绍了各种大功率InGaAsP/InP掩埋异质结构激光二极管的结构、制作和特性。此外, 内容还包括光学卡计系统的新进展、运用、设计要点和误差计算。这篇56页的评论还附有许多照片、图表和曲线。

译自 L & O, 1991; 10 (8): 65 中免 译 刘松明 校