自由电子激光器中电子相互作用对增益的影响

苟三奎

（兰州大学物理系，兰州）

摘要：求出了螺旋磁场泵自由电子激光器中含电子相互作用的增益表达式，并进行了讨论。

Effect of electron interaction on free-electron laser gain

Gou Sankui

(Department of Physics, Lanzhou University)

Abstract: The effect of electron interaction on gain of a free-electron laser pumped with a helical magnetic field is formulated.

Colson从单粒子理论出发给出了自由电子激光器的增益[1]，所得结果表明：加大电流（或束流密度）是提高器件增益的一个途径。然而，在大电流和高束流密度情况下必须考虑束流中电子之间的相互作用即空间电荷效应，此时，单粒子理论不再适用。本文在流体理论[2]中讨论了强束流情况下电子间相互作用对螺旋磁场泵自由电子激光器件增益的影响，

对泵场取：

$$\vec{A}_w = A_w\left[\vec{e}_x\sin(k_w z) + \vec{e}_y\cos(k_w z)\right] \tag{1}$$

激光场相应为：

$$\vec{A}_r = \tilde{A}_r(z)\left[\vec{e}_x\cos(k_r z-\omega_r t+\phi_r) + \vec{e}_y\sin(k_r z-\omega_r t+\phi_r)\right] \tag{2}$$

式中，$\tilde{A}_r(z)$是z的慢变函数，电磁场由$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$得到，而$\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_w$，$\Phi$为束流中的电位势。一般情况下，$\left|\vec{A}_r\right| \ll \left|\vec{A}_w\right|$，因而任一物理量$G$都可写为：

$$G = \bar{G} + \tilde{G} \tag{3}$$

式中，$\bar{G}$是忽略$\vec{A}_r$的平衡态解，$\tilde{G}$是$\vec{A}_r$的一阶效应。电子轨道由Lorentz方程决定：

$$\frac{d(m\gamma\vec{V})}{dt} = -e\left[\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}\right] \tag{4}$$

它给出电子相对论因子γ的方程为：

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{e^2\omega_r A_w\tilde{A}_r}{m^2c^2\gamma(t)}\cos\left[\left(k_r+k_w\right)z-\omega_r t+\phi_r\right] + \frac{eV_z(t)}{mc^2}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} \tag{5}$$

束流密度n满足连续性方程[2]：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(nV_z\right)=0 \tag{6}$$

将（1）式代入（4）、（5）和（6）式得：

$$\overline{\gamma}=\text{常数}\gamma_0 \tag{7}$$

$$\overline{V}_z=\text{常数}V_{z0} \tag{8}$$

$$\overline{n}=\text{常数}n_0 \tag{9}$$

$$\overline{z}=V_{z0}(t-t_0) \tag{10}$$

式中，t_0是电子进入泵场的初始时刻。束流中电子间相互作用由空间电荷位势$\widetilde{\Phi}$决定，它满足Poisson方程[3]（在SI单位制中）：

$$\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial z^2}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\widetilde{n} \tag{11}$$

将（11）式对t求偏导并利用（6）式后得：

$$\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial t\partial z}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\left[n_0\widetilde{V}_z+V_{z0}\widetilde{n}\right] \tag{12}$$

由（11）和（12）式又可得：

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z}=-\frac{en_0}{\varepsilon_0}\widetilde{z} \tag{13}$$

即空间电荷场是电子束的纵向扰动所致。将（1）、（2）和（3）式代入（4）式得下列关于$\widetilde{z}$的强迫振荡型方程：

$$\frac{d^2\widetilde{z}}{dz^2}+k_p{}^2\widetilde{z}=\frac{e^2\widetilde{A}_wA_r[c^2(k_r+k_w)-\omega_rV_{z0}]}{m^2\gamma_0{}^2V_{z0}{}^2c^2}\cos\left(\Psi_0+\Delta kz\right) \tag{14}$$

式中，$\Psi_0=\phi_r-\omega_rt_0$为初始相对位相；$\Delta k=(k_r+k_w)-\frac{\omega_r}{V_{z0}}$为谐振参数；$\omega_p{}^2=e^2n_0/(m\gamma_0\varepsilon_0)$为相对论等离子体频率；$k_p{}^2=\omega_p{}^2\left(c^2-V_{z0}{}^2\right)/\left(c^2V_{z0}{}^2\right)$表示固有振荡。由（14）式求出$\widetilde{z}$后，代入（6）式得$\widetilde{n}$，代入（13）式得$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z}$，代入（5）式得$\widetilde{\gamma}$。

激光场满足下列方程：

$$2k_r\frac{d\widetilde{A}_r(z)}{dz}=\frac{e^2\mu_0A_w}{m}\left\langle\frac{n\cos[(k_r+k_w)z-\omega_rt+\phi_r]}{\gamma}\right\rangle \tag{15}$$

式中，$\left\langle\frac{n\cos[(k_r+k_w)z-\omega_rt+\phi_r]}{\gamma}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{n\cos[(k_r+k_w)z-\omega_rt+\phi_r]}{\gamma}d\Psi_0$。

将z、n和z的解代入（15）式后得到器件在长度L上的增益为：

$$G_L=\frac{e^2\omega_p^2A_w^2L^2[c^2(k_r+k_w)-\omega_rV_{z0}]}{16m^2\gamma_0V_{z0}c^4k_r}\Big[Pf(\theta+\theta_p)+Qf(\theta-\theta_p)+2Rf(\theta)\Big] \tag{16}$$

式中，$\theta=\Delta kL/2$；$\theta_p=k_pL/2$；$f(x)=[\sin x/x]^2$；及$P=V_{z0}^2/(c^2-V_{z0}^2)+[\Delta k+k_p-2(k_r+k_w)]/k_p$；$Q=V_{z0}^2/(c^2-V_{z0}^2)+[2(k_r+k_w)+k_p-\Delta k]/k_p$；$R=-V_{z0}^2/(c^2-V_{z0}^2)+\omega_rV_{z0}/[c^2(k_r+k_w)-\omega_rV_{z0}]$。

（16）式即考虑空间电荷效应的增益表 达式。对一般器件参数，（16）式给出：

$$G_L\approx-G_0[f(\theta)^{(1)}+\frac{\theta_p^2}{6}f(\theta)^{(3)}] \tag{17}$$

式中，$G_0=e^2A_w^2\omega_p^2L^3k_w/(4m^2\gamma_0^2V_{z0}^2c^2)$；$f(\theta)^{(n)}$是$f(\theta)$对$\theta$的$n$阶导数。(17)式中第二项代表 电子间相互作用的影响，对稀疏电子束流，(17)式给出文献[1]的结果，最大增 益$GL_{max}=0.54G_0$发生$\theta_{max}=1.3$处；但当束流密度较大时，电子间相互作用将对增益产生影响，最大增益$G_{Lmax}=G_0[0.54-0.116\theta_p^2]$发生在$\theta_{max}\approx1.3-5.1\theta_p^2$处。由此看到，由于电子间相互作用使束流 质量变劣，因而空间电荷的效应是降低器件增益。考虑到$G_0\propto\theta_p^2\propto n_0$，由(17)式得：

$$\frac{dG_L}{dn_0}\propto-f(\theta)^{(1)}-\frac{\theta_p^2}{3}f(\theta)^{(3)} \tag{18}$$

因此，若以加大束流密度来提高增益，器件参数应满足：

$$f(\theta)^{(1)}+\frac{\theta_p^2}{3}f(\theta)^{(3)}\leqslant 0 \tag{19}$$

再利用（17）和（19）式知，器件增益同时满足：

$$G_L\geqslant\frac{G_0\theta_p^2}{6}f(\theta)^{(3)} \tag{20}$$

并且存在一个θ_p的最佳值满足：

$$\overset{(1)}{f}(1.3-5.1\theta_p^2)+\frac{\theta_p^2}{3}\overset{(3)}{f}(1.3-5.1\theta_p^2)=0 \tag{21}$$

感谢李知几教授的有益讨论。

参 考 文 献

[1] Colson W B. One-body electron dynamics in a free electron laser. Phys Lett, 1977; A64 (2): 190

[2] Bernstein I B, Friedland L. Theory of the free-electron laser in combined helical pump and axial guide fields. Phys Rev, 1981; A23 (2): 816

[3] Antonsen Jr T M. Density and deceleration limits in tapered free-electron lasers. Phys Rev Lett, 1987; 58 (3): 211

* * *

作者简介：苟三奎，男，1962年10月出生。硕士，讲师。曾从事粒子物理、引力论和宇宙论研究工作，现从事自由电子激光理论研究工作。

收稿日期：1990年3月21日。 收到修改稿日期：1991年1月28日。