激光加热温度场的简化计算

李好平

（沈阳冶金机械专科学校，沈阳）

王 莉 才庆魁

（沈阳煤矿设计院，沈阳） （东北工学院，沈阳）

摘要：本文计算分析了激光加热金属的简化计算方法，并指出了简化计算的适用条件。

A laser heating analytical model

Li Haoping

(Shenyang College of Metallurgical Machinery)

Wang Li Cai Qingkui

(Shenyang Coal Mine Design Institute) (Northeast University of Technology)

Abstract: A simplified laser heating analytical model is analyzed, and the pertinent condition for application of the model is pointed out.

一、引 言

激光加工过程中的热传导数学模型一直是国内外有关科技工作者致力研究的重要课题[1,2]。但由于实际传热过程十分复杂，目前尚难于提出完美且通用的数学模型。通常，激光加热温度场的计算或是采用数值算法，或是采用解析算法。数值算法的算式简单，处理边界条件容易，但计算工作量大，若不借助电子计算机的帮助就难以得到令人满意的结果。解析算法虽然较为繁难，但物理概念清楚。事实上，在实际应用中过分地追求激光加热温度场的精确解常常是没有必要的，因此，人们常常采用实验方法或简化计算方法来获取必要的温度场信息。但是，人们简化计算求得的温度场与实际情况之间常有很大差距，于是有人将所计算得到的结果乘上一个实验因子，来弥补计算结果的不足。然而每个计算点都乘上一个实验因子势必带来财力、人力及时间上的负担，同时也失去了计算的意义。本文对激光加热金属中通常采用的简化计算方法进行了分析，认为人们应用简化计算方法计算，必须在合理的前提下，并且应该进行必要的计算修正。

二、激光加热温度场的分析

作为机械加工用的激光热源与常规热源比较，激光光斑的直径可以调得很小，热源功率

密度极高，激光束与工件表面交互作用的时间很短。激光热源的这些特点使其在机械加工中具有多种完全不同的用途。人们常常根据激光热源的不同应用场合，对其温度场作出相应的简化。这种简化主要是：激光作为打孔工具时，将其视为点热源；激光作为切割工具时，将其视为线热源；激光作工件表面处理时，将其视为面热源。但无论怎样简化，激光热源实际上是一个有限大面热源，因此，分析计算其温度场首先应从这一基本分析出发。

三、原理及计算方法

为了建立温度场的数学模型，有必要先对温度场的某些边界条件及物性参量作适当限定。若被加热工件足够厚而且大，并且设辐射损失的热量可忽略不计，工件内部的物质是均匀的，则假设加热是在半无限大均匀物体表面进行的。建立有限大面热源温度场数学模型的基本方法是：先用傅里叶变换的矢量法解出瞬时点热源的温度场[3]，再把面热源看成是无数点热源的集合，进而对时间及面积积分求解出面热源的温度场。

在无限大导热体内，设点热源的瞬时发热量为Q_d，求任意时刻τ，任意地点$A(x,y,z)$处的温升θ。若热扩散率a为常量，并且温度场初始状态是场内处处温度相等，热源发热后，温度场内的温度分布必然对称于热源点。将坐标原点置于热源点上，令$\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因温度分布对称于原点，于是温升函数$\theta(\vec{R},\tau)$可记作$\theta(R,\tau)$。按照能量守恒法则可得出：

$$\frac{Q_d}{c\rho}=\int_0^{\infty}4\pi R^2\theta(R,\tau)\,dR \tag{1}$$

式中，c为温度场内物质的比热容；ρ为物质的密度。

已知三维直角坐标系中，非稳态热传导微分方程是：

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=a\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

若c，ρ与$\vec{R}$无关，将（2）式作傅里叶变换，解出温升：

$$\theta=\frac{A}{(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{R^2}{4a\tau}\right] \tag{3}$$

将（3）式代入（1）式解出$A=Q_d/c\rho$，于是无限大导热体中瞬时点热源的温升公式为：

$$\theta=\frac{Q_d/c\rho}{(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{R^2}{4a\tau}\right] \tag{4}$$

或

$$\theta=\frac{Q_d}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a\tau}\right] \tag{5}$$

若热源点不在坐标原点，而在点（ξ，ζ，η）处，则点（x，y，z）处温升为：

$$\theta=\frac{Q_d}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4a\tau}\right] \tag{6}$$

以点热源瞬时发热公式（6）为基础，根据温度场迭加原理，用积分方法求出有限大面热源在无限大导热体中的温度场。设面热源是半径为R的圆形区域，位于$z=0$的平面上，取面热源上任意一点（ξ，ζ，0）积分。考虑到主要是希望考察温度场中面热源法向上的最大温升，因此，选面热源中心法向上的温升作为求解对象。令此法向量为z坐标轴，于是，要考察温升的点的坐标为（$0,0,z$）。将上述条件带入（6）式并将其改写成柱坐标的形式：

$$\theta=\frac{Q_d}{cp(4\pi a\tau)^{2/3}}\exp\left[-\frac{r^2+z^2}{4a\tau}\right] \tag{7}$$

式中，$r^2=\xi^2+\zeta^2$。设面热源的热强为q_m，将$Q_d=q_m r d\tau dr d\varphi$代入(7)式，并对面积和时间积分：

$$\theta=\int_0^\tau\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{q_m r}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2+z^2}{4a\tau}\right]d\tau dr d\varphi \tag{8}$$

先对面积积分得：

$$\theta=\int_0^t\left[q_m\exp\left(\frac{-z^2}{4a\tau}\right)\Big/c\rho\sqrt{4\pi a\tau}\right]\left[1-\exp\left(\frac{-R^2}{4a\tau}\right)\right]d\tau \tag{9}$$

当$R\to\infty$时，公式（9）变成无限大面热源的一维温升求解公式，此时：

$$\theta_1=\int_0^t\left[q_m\exp(-z^2/4a\tau)/c\rho\sqrt{4\pi a\tau}\right]d\tau \tag{10}$$

令$\dfrac{z}{\sqrt{4a\tau}}=u$可解出：

$$\theta_1=\frac{q_m}{c\rho\sqrt{4\pi a}}\cdot\frac{z}{\sqrt{a}}\int_{\frac{z}{\sqrt{4at}}}^{\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2}du=\frac{q_m z}{2\lambda\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) \tag{11}$$

式中，热导率$\lambda=ac\rho$，$\psi(P)=\int_P^\infty\dfrac{1}{u^2}e^{-u^2}du=\dfrac{e^{-P^2}}{P}-\sqrt{\pi}\left[1-\mathrm{erf}(P)\right]$，$\mathrm{erf}(P)$为误差函数[4]。

同理可求出（9）式积分的第二部分：

$$\theta_2=\frac{q_m\sqrt{z^2+R^2}}{2\lambda\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right) \tag{12}$$

于是有限大圆形面热源在无限大导热体中，对热源中心法向上任意点的温升公式为：

$$\theta=\frac{q_m}{2\lambda\sqrt{\pi}}\left[z\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right)-\sqrt{z^2+R^2}\,\psi\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right)\right] \tag{13}$$

四、分 析 与 讨 论

将（13）式改写成激光加热温度场的算式。由于对激光加热工件的情况作了如下假设：加热是在半无限大、均匀导热、$z<0$一侧绝热的物体表面开始的，并且设光模为TEM_{00}，能量

密度在激光光斑内均匀分布。又设$q_m = P\eta$，P为激光功率密度，η为工件表面吸收光能的效率。于是当激光束作用在工件表面的光斑半径为R时，求光斑中心沿光束方向任意深度z处，任一时刻t时的温升由下式给出：

$$\theta = \frac{P\eta}{\lambda\sqrt{\pi}}\left[z\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) - \sqrt{z^2+R^2}\ \psi\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right)\right] \tag{14}$$

人们在研究激光表面处理温度场时，常用一维传热温度场作假设[5]。现来分析这种假设的合理性。若将（13）式与（11）式比较，可知在热源中心处，一维传热的温升公式与实际传热的温升公式有如下关系：

$$\frac{\theta-\theta_1}{\theta_1} = \frac{\theta}{\theta_1} - 1 = -\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\left[\psi\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right)\Big/\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right)\right] \tag{15}$$

令

$$K(R,z,t) = 1 - \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\left[\psi\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right)\Big/\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right)\right] \tag{16}$$

则$\theta = K\theta_1$，显然K值与激光源功率大小无关。根据(16)式，利用计算机很容易将修正系数K绘成曲线或编制成表，于是可用较简单的一维传热方程求出θ_1，再乘以系数K来求得θ，或当K值趋近于1时，直接用θ_1代替θ。事实上，在钢铁材料的激光表面处理工艺中，K常常很接近1[6]，这时，无论是采用数值法，还是解析法，都可大大简化计算过程。

五、结　　论

1. 在本文分析的三维传热空间，面热源中心法向上各点的温升可由一维传热公式求解，但必须乘以修正系数K。

2. 修正系数$K = 1 - \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\left[\psi\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\sqrt{4at}}\right)\Big/\psi\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right)\Big]$，其大小与激光热源的功率大小无关。

3. 金属的激光表面处理，因作用时间t足够小，常常使修正系数K趋于1，从而使计算简化。

参 考 文 献

〔1〕 Kou S, Sun D K. Heat flow during the laser transformation hardening of cylindrical bodies. Metall Trans, 1983; 14A: (9) 1859～1867

〔2〕 章靖国，张小岷，林一坚 *et al*. 快速凝固Fe-C-Sn合金的显微组织。金属学报，1989；25 (2)：A155～A157

〔3〕 Özisik Necati M，俞昌铎主译. 热传导. 北京：高等教育出版社，1984

〔4〕 王连祥，方德植，张鸣镛 *et al*. 数学手册. 北京：人民教育出版社，1979：1315

〔5〕 江晓平. GH37合金激光表面熔凝处理. 东北工学院硕士学位论文. 沈阳：东北工学院，1984

大视角无畸变彩虹全息图的制作技术

王典民 哈流柱 王民草

（北京理工大学，北京）

摘要：本文给出了利用全息光学元件制作大面积大视角无畸变彩虹全息图的方法，并给出了实验结果。

Technique for making rainbow hologram to reconstructe large viewing angle and distortionless image

Wang Dianmin, Ha Liuzu, Wang Mincao

(Beijing Institute of Technology)

Abstract: A new technique for making rainbow hologram to reconstructe large viewing angle and distortionless image by use of holographic optical element is described and the result of experiment is given.

一、概 述

彩虹全息图的制作已出现了很多方法[1~5]，虽然各有特色，却无外乎两种类型，一是通过透镜成象的一步法，一是利用主全息图再现象记录彩虹全息图的两步法。一步法中透镜的口径直接限制了彩虹全息图的视角；两步法[6]中，主全息图的长度即狭缝的长度，第二步记录需要共轭再现主全息图，要获得无畸变的全息象，必须用大口径的透镜产生的会聚光或准直光作为主全息图的参考光或照明光，以便准确地共轭再现。而实际上透镜的口径不可能做得太大，而且制造代价十分昂贵。因此，用传统方法不可能制得大视角无畸变的彩虹全息图。

本文鉴于以上考虑，给出了利用全息光学元件获得大口径会聚球面波的方法，阐述了利用这种全息光学元件制作大视角无畸变彩虹全息图的原理过程，并进行了实验。

〔6〕 李好平，才庆魁，师昌绪．激光处理钢疲劳寿命的函数表达．应用激光，1990；10（3）：135～137

* * *

作者简介：李好平，男，1958年出生。讲师，硕士。现从事激光应用研究。

王 莉，女，1956年出生。工程师。从事热工及电器研究。

才庆魁，男，1946年出生。副教授。从事激光应用研究。

收稿日期：1990年2月27日。