

各向异性高斯-斯克尔模型光束的传输特性

蒲继雄

陈金纪

(华侨大学应用物理系, 泉州)

(福建师范大学实验中心, 福州)

摘要: 根据 Huggens-Fresnel 衍射积分, 得到了各向异性高斯-斯克尔模型 (Anisotropic Gaussian-Schell Model, 简称 AGSM) 光束经过光学系统传输的变换公式, 进而讨论 AGSM 光束在自由空间中的传输特性与光源参数的关系。

Propagation characteristics of anisotropic Gaussian-Schell model beams

Pu Jixiong

(Department of Applied Physics, Huachiao University)

Chen Jinkai

(Experiment Center, Fujian Normal University)

Abstract: Based on Huggens-Fresnel diffraction integral, the transformation formula that describes the propagation of anisotropic Gaussian-Schell model beams through optical systems has been derived. Further, the relation between their propagation characteristics in the free-space and the parameters of their sources is discussed.

一、引 言

近几年, 人们对高斯-斯克尔模型 (Gaussian-Schell Model, 简称 GSM) 光束已进行了较深入的研究^[1-4]。A. T. Friberg 等人采用与高斯光束类似的两个参数 $\omega(z)$ 、 $R(\omega)$ 表示 GSM 光束的光斑半径和位相面的曲率半径^[3]。定义 GSM 光束的 q 参数, GSM 光束经过光学系统的传输则可用 ABCD 变换定律描述^[4]。

但是, 对各向异性高斯-斯克尔模型光束的研究尚少^[5,6]。本文根据 Huggens-Fresnel 衍射积分, 得到了 AGSM 光束经过光学系统的传输公式。进而讨论 AGSM 光束在自由空间的传输特性与光源参数的关系。

二、AGSM 光束经过光学系统的传输公式

GSM 光束的空间相干度 $\mu(\vec{r}_1, \vec{r}_1')$ 仅依赖于位置差 $\vec{r}_1 - \vec{r}_1'$, 即

$$\mu(\vec{r}_1, \vec{r}_1') = g(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \quad (1)$$

而且, $g(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')$ 和光强分布 $I^0(\vec{r}_1)$ 均为高斯分布。对于 AGSM 光束, 在光源平面, 光

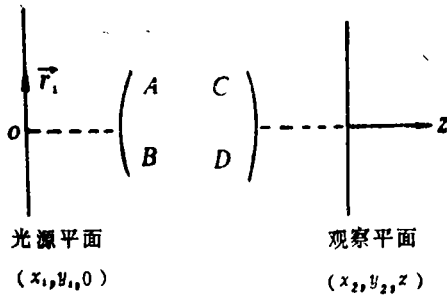


图1 AGSM光场经过光学系统传输示意图
z轴—光场传输方向
r₁—光源平面的二维坐标矢量

强 $I^{(0)}(\vec{r}_1)$ 和空间相干度 $g^{(0)}(\vec{r})$ 为^[5];

$$I^{(0)}(\vec{r}_1) = I_0 \exp\left[(-2x_1^2/\omega_{0x}^2) - (2y_1^2/\omega_{0y}^2)\right] \quad (2)$$

$$g^{(0)}(\vec{r}) = \exp\left[(-x^2/2\sigma_{0x}^2) - (y^2/2\sigma_{0y}^2)\right] \quad (3)$$

式中, $I_0, \omega_{0x}, \omega_{0y}, \sigma_{0x}$ 和 σ_{0y} 均为正常数; $(x_1, y_1, 0)$ 和 $(x_1', y_1', 0)$ 分别为矩形Cartes坐标系中垂直于z轴的光源平面的Cartes坐标分量(见图1), $x = x_1 - x_1', y = y_1 - y_1'$ 。

由(1)~(3)式, 可得光源的二阶相关函

数(或称为交叉谱密度函数) $\omega^{(0)}(\vec{r}_1,$

$\vec{r}_1', 0)$ 为^[5]:

$$\omega^{(0)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1', 0) = [I^{(0)}(\vec{r}_1)I^{(0)}(\vec{r}_1')]^{1/2} \mu^{(0)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1') \\ = \omega_x^{(0)}(x_1, x_1', 0) \omega_y^{(0)}(y_1, y_1', 0) \quad (4)$$

$$\text{式中, } \omega^{(0)}(x_1, x_1', 0) = A_x^{(0)} \exp\left[-(x_1 + x_1')^2/2\omega_{0x}^2\right] \exp\left\{\left[-(\omega_{0x}^2 + \sigma_{0x}^2)/2\omega_{0x}^2\sigma_{0x}^2\right](x_1 - x_1')^2\right\} \quad (5)$$

$\omega_y^{(0)}(y_1, y_1', 0)$ 也具有相似的表示式, 而且 $I_0 = A_x^{(0)}A_y^{(0)}$ 。

如图1所示, AGSM光束经过光学系统(光学系统的光线传输矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$)传输后, 在观察平面, 光场的二阶相关函数为^[4]:

$$\omega(\vec{r}_2, \vec{r}_2', z) = \iint d\vec{r}_1 d\vec{r}_1' \omega^{(0)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1', 0) \exp\{(-ik/2B)[D(\vec{r}_2^2 - \vec{r}_2'^2) - 2\vec{r}_2 \vec{r}_1 + 2\vec{r}_1' \vec{r}_2' + A(\vec{r}_1^2 - \vec{r}_1'^2)]\} \quad (6)$$

把(4)、(5)式代入(6)式, 积分得:

$$\omega(\vec{r}_2, \vec{r}_2', z) = \omega_x(x_2, x_2', z) \omega_y(y_2, y_2', z) \quad (7)$$

$$\text{式中, } \omega_x(x_2, x_2', z) = A_x(z) \exp\left[-(x_2 + x_2')^2/2\omega_x^2(z)\right] \exp\left\{\left[-(\omega_{0x}^2 + \sigma_{0x}^2)/2\sigma_{0x}^2\omega_x^2(z)\right](x_2 - x_2')^2\right\} \exp\left[-ik(x_2^2 - x_2'^2)/2R(z)\right] \quad (8)$$

$$\text{式中, } \omega_x(z) = \omega_{0x} \Delta_x(z) \quad (9)$$

$$A_x(z) = A_x^{(0)} / \Delta_x(z) \quad (10)$$

$$\Delta_x(z) = \{A^2 + (\lambda B/\pi\omega_{0x})^2 [(1/\omega_{0x}^2) + (1/\sigma_{0x}^2)]\}^{1/2} \quad (11)$$

$$R_x(z) = [(B^2/b_{0x}^2) + A^2] / [(BD/b_{0x}^2) + AC] \quad (12)$$

$$b_x(z) = (\pi/\lambda)\omega_x(z)\beta_x \quad (13)$$

$$b_{0x} = (\pi/\lambda)\omega_{0x}^2\beta_x \quad (14)$$

$$\beta_x = (1 + 1/\alpha_x^2)^{-1/2} \quad (15)$$

$$\alpha_x = \sigma_{0x} / \omega_{0x} \quad (16)$$

y 方向的相应的量也具有相似的表示式。

定义AGSM光束在 x （或 y ）方向的 q 参数为：

$$1/q_x(z) = 1/R_x(z) - i/b_x(z)$$

由(9)~(16)式,并考虑到传输过程中 α_x （或 α_y ）保持不变^[4],我们可以得到如下关系:

$$q_x(z) = (Aq_{0x} + B)/(Cq_{0x} + D) \quad (17)$$

$$q_y(z) = (Aq_{0y} + B)/(Cq_{0y} + D) \quad (18)$$

上面两式表明,AGSM光束经过光学系统传输, x 方向（或 y 方向）的 q 参数满足 $ABCD$ 变换定律,据此,可以很方便地描述AGSM光束的传输。下面,我们讨论AGSM光束在自由空间的传输特性。

三、AGSM光束在自由空间的传输特性

如图2所示,AGSM光源平面在 $z=0$ 平面,光束沿着 z 方向传输。从 $z=0$ 平面至观察平面（ z 平面）,光线传输矩阵为:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

把上式的矩阵元代入(9)、(11)和(12)式,得:

$$\omega_x(z) = \omega_{0x} [1 + (\lambda z / \pi)^2 k_x]^{1/2} \quad (20)$$

$$R_x(z) = z [1 + (\pi / \lambda z)^2 / k_x] \quad (21)$$

据参考文献[4]可知,在 z 平面 x 方向的相干长度为:

$$\sigma_x(z) = \sigma_{0x} [1 + (\lambda z / \pi)^2 k_x]^{1/2} \quad (22)$$

$$k_x = (1/\omega_{0x}^2)(1/\omega_{0x}^2 + 1/\sigma_{0x}^2) \quad (23)$$

式中,

同样可得:

$$\omega_y(z) = \omega_{0y} [1 + (\lambda z / \pi)^2 k_y]^{1/2} \quad (24)$$

$$R_y(z) = z [1 + (\pi / \lambda z)^2 / k_y] \quad (25)$$

$$\sigma_y(z) = \sigma_{0y} [1 + (\lambda z / \pi)^2 k_y]^{1/2} \quad (26)$$

$$\text{式中, } k_y = (1/\omega_{0y}^2)(1/\omega_{0y}^2 + 1/\sigma_{0y}^2) \quad (27)$$

为讨论方便起见,假定 $\omega_{0x} < \omega_{0y}$,即在光源平面上,光斑在 x 方向是压缩的。

令(20)式等于(24)式(即 $\omega_x(z) = \omega_y(z)$),得:

$$\bar{z} = (\pi / \lambda) [(\omega_{0y}^2 - \omega_{0x}^2) / (1/r_x^2 - 1/r_y^2)]^{1/2} \quad (28)$$

$$\text{式中, } 1/r_x^2 = 1/\omega_{0x}^2 + 1/\sigma_{0x}^2, \quad 1/r_y^2 = 1/\omega_{0y}^2 + 1/\sigma_{0y}^2 \quad (29)$$

若 \bar{z} 为实数,则表示AGSM光束传输到 $z = \bar{z}$ 处,光斑形状变成圆形[因为 $\omega_x(\bar{z}) = \omega_y(\bar{z})$]。反之,若 \bar{z} 无实数解,则表示在传输过程中,光斑形状永不会变成圆形。由(20)、(24)和(28)式可以看出, r_x 、 r_y 、 k_x 和 k_y 诸参数对AGSM光束的传输影响甚大。下面讨论几种情形。

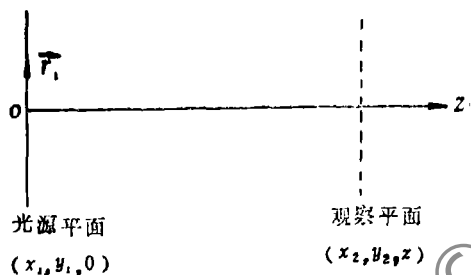


图2 AGSM光束在自由空间传输示意图

(1) $r_x > r_y$

由(28)式可见, 当 $r_x > r_y$ 时, \bar{z} 无实数, 这表明在任何 z 平面, $\omega_x(z) \doteq \omega_y(z)$ 。这点与完全相干的高斯光束不同^[7]。

若 $k_x = k_y$ ($r_x > r_y$), $\omega_x(z)$ 和 $\omega_y(z)$ 以相同的增大速率随 z 增大而增大 [$\sigma_x(z)$ 和 $\sigma_y(z)$ 的变化情况分别与 $\omega_x(z)$ 和 $\omega_y(z)$ 相同, 不予赘述]。即: $\omega_x(z)/\omega_y(z) = \omega_{0x}/\omega_{0y}$ 。图3描绘了光斑形状、大小及位相面曲率半径与 z 的关系。由图3可见, $R_x(z) = R_y(z) = R(z)$ 。

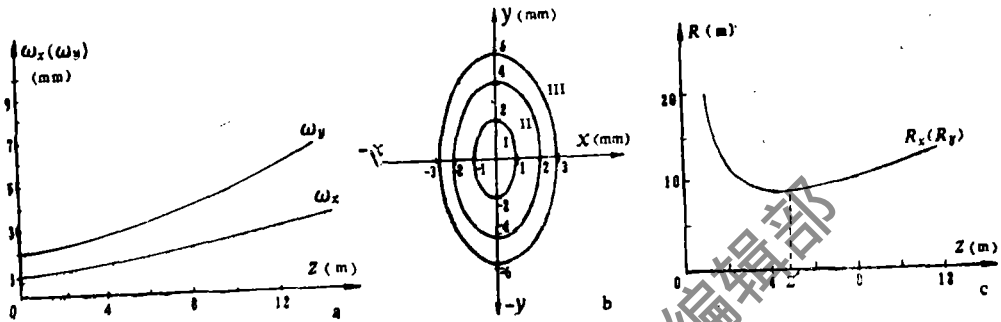


图3 $r_x > r_y$, $k_x = k_y$ 时, AGSM光束在传输过程中光束参数的变化情况

光源参数— $\omega_{0x} = 1\text{mm}$ $\omega_{0y} = 2\text{mm}$ $\sigma_{0x} = 2\text{mm}$ $\sigma_{0y} = 0.459\text{mm}$ $\lambda = 6328 \text{ \AA}$

a— $\omega_x(z)$ 和 $\omega_y(z)$ 与 z 的关系 b—在三个位置($z=0, z=8\text{m}, z=11\text{m}$)光斑形状

c— $R_x(z)$ 和 $R_y(z)$ 与 z 的关系

这说明, AGSM光束的位相面是一曲率半径 $R(z)$ 不断随 z 变化的球面。并且 $R(z)$ 有一极小点。令 $dR(z)/dz=0$, 得极小点的位置 $z' = (\pi/\lambda)/k^{1/2}$ 。把 $z = z'$ 代入(20)、(22)、(24)和(26)式。可以验证, $\omega_x(z')$ 、 $\omega_y(z')$ 、 $\sigma_x(z')$ 和 $\sigma_y(z')$ 是光源平面 $z=0$ 处 $\sqrt{2}$ 倍。可见, z' 相当于完全相干激光光束的瑞利距离^[8]。

若 $k_x < k_y$ ($r_x > r_y$), $\omega_x(z)$ 随 z 增大的速率较 $\omega_y(z)$ 小, 即随着 z 的增大, 光斑在 x 方向变得更扁了。由(21)、(25)两式可见, $R_x(z) > R_y(z)$, 即光束的位相面不再是球面了。

(2) $r_x < r_y$ ($k_x > k_y$)

从(20)和(24)两式可得, $\omega_x(z)$ 随 z 增大的速率较 $\omega_y(z)$ 大。在 $z=0$ 光源平面, $\omega_{0x} < \omega_{0y}$ 。随着 z 的增大, $\omega_x(z)/\omega_y(z)$ 逐渐增大, 当 z 增大到某一位置 \bar{z} , $\omega_x(\bar{z}) = \omega_y(\bar{z})$, 即

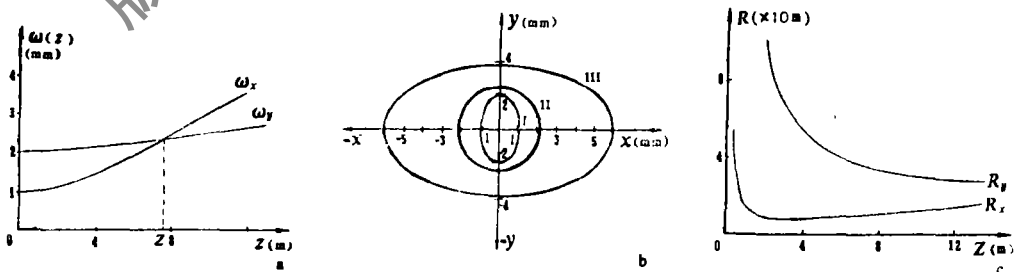


图4 $r_x < r_y$, $k_x > k_y$ 时, AGSM光束在传输过程中光束参数的变化情况

光源参数— $\omega_{0x} = 1\text{mm}$ $\omega_{0y} = 2\text{mm}$ $\sigma_{0x} = 1\text{mm}$ $\sigma_{0y} = 2\text{mm}$ $\lambda = 6328 \text{ \AA}$

a— $\omega_x(z)$ 和 $\omega_y(z)$ 与 z 的关系 b—在三个位置($z=0, z=7\text{m}, z=20\text{m}$)光斑形状

c— $R_x(z)$ 和 $R_y(z)$ 与 z 的关系

光斑变成圆形。当 z 继续增大, $\omega_x(z) > \omega_y(z)$, 即光斑变成为在 y 方向是压缩的(如图4a、4b)。这点与完全相干的高斯光束类似^[7]。由图4可知, $R_x(z) < R_y(z)$ 。

$$(3) r_x = r_y \quad (k_x > k_y)$$

当 $k_x > k_y$, $\omega_x(z)$ 随 z 增大的速率较 $\omega_y(z)$ 大。随着 z 的增大, $\omega_x(z)/\omega_y(z)$ 趋于稳定值 r_y/r_x 。因为 $r_x = r_y$, 故在远场处, 光斑的形状是圆形的。这正是参考文献[5]得出的结论。

四、讨 论

以上讨论了AGSM光束的传输特性与光源参数的关系。这也可以衍射效应和相干性加以说明。假设观察平面在远场区域, x (或 y) 方向的光斑大小可近似地表示为:

$$\omega_x(z) \approx (\lambda z / \pi) / r_x$$

发散角为:

$$2\theta_x = 2 (\lambda / \pi) / r_x$$

若 ω_x 愈小(即 r_x 愈小), 则 $\omega_x(z)$ 和 $2\theta_x$ 愈大。这个现象与衍射效应类似。此外, σ_{ox} 愈小(r_x 愈小), $\omega_x(z)$ 和 $2\theta_x$ 也愈大。这表明, 相干性愈差, 远场光斑大小、发散角愈大。AGSM光束在自由空间中传输时光斑形状的变化, 正是由 x 方向和 y 方向的衍射效应和相干性决定的。

参 考 文 献

- [1] Friberg A T, Sudol R J. Opt Acta, 1983; 30 (8) : 1075
- [2] 蒲继雄. 应用激光, 1989; 9 (4) : 160
- [3] Friberg A T, Sudol R J. Opt Commun, 1982; 41 (6) : 383
- [4] 蒲继雄, 陈金钊. 光学学报, 1989; 9 (5) : 447
- [5] Li Yajun, Wolf E. Opt Lett, 1982; 7 (6) : 256
- [6] Simon R, Sudarshan E C G, Mukunda N. Phys Rev (A), 1985; 31 (4) : 2419
- [7] Simon R. Opt Commun, 1983; 46 (5, 6) : 265
- [8] Siegman A E. An introduction to laser and maser. New York; McGraw-Hill, 1971; chapter 8

作者简介: 蒲继雄, 男, 1962年1月出生。讲师。现从事相干光束、非线性光学效应研究工作。

陈金钊, 男, 1935年10月出生。副教授。1981~1983年在美国南加州大学物理系任访问学者, 现从事激光与激光光谱学研究。

收稿日期: 1990年1月11日。