激光技术 LASER TECHNOLOGY
Vol.13, No.3

有相对失调光学系统的增广矩阵

吕百达 丘 悦 蔡邦维
（四 川 大 学）

摘要：使用坐标变换和矩阵方法，推导出了有相对失调光学系统的4×4增广矩阵，并对此作了分析。证明无相对失调系统的4×4增广矩阵可由一般公式简单得出。

An augmented matrix for relatively misaligned optical systems

Lu Baida, Qiu Yue, Cai Bangwei
(Sichuan University)

Abstract: An augmented 4×4 matrix for relatively misaligned optical systems is derived and analysed using coordinate transformation and matrix method. It has been shown that the augmented 4×4 matrix for optical systems which are misaligned but haven't relative misalignment can be simply obtained from the general expression.

光学系统(例如光学成象系统、激光谐振腔等)的准直是一个在实际工作中经常遇到的问题。虽然人们采用了种种方法企图使光学系统达到理想的共轴，但由于光学元件制作的非完善性、工作过程中的机械振动、热、电干扰等原因，使实际的光学系统都有不同程度的失调。文献〔1〕系统地总结了对失调光学系统使用矩阵方法进行分析所得到的重要结果。在文献〔1〕中，研究对象主要是无相对失调的光学元件或系统，因此可以只用两次坐标旋转和一次共轴传输推导出失调光学系统的增广矩阵。同时，在失调系统的第一参考面和第二参考面上的失调几何参量，即径向线偏移ε和角偏移ε'存在简单几何关系：

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1+l\varepsilon_1', \qquad \varepsilon_2'=\varepsilon_1' \tag{1}$$

式中，l为两参考面间的轴向距离。

对有相对失调的光学系统（1）式一般不再成立，严格来说，应当对它的矩阵表示式另行推导。本文拟对这一问题具体进行讨论和分析，并将所得结果与无相对失调情况作一比较，所使用的方法和得到的结果对失调光学系统（包括激光系统）的研究有参考意义。

一、有相对失调系统增广矩阵的推导

研究对象设为图1所示一般失调光学系统。在无失调情况下，参考面RP_1、RP_2'处分别有变换矩阵为$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}$的光学系统，$RP_1$、$RP_2'$间轴向距离为$l$，$Z$轴为理想光轴。现设二光学系统对理想光轴失调，且相互间亦存在相对失调，失调光轴和ε、ε'正负按文献〔1〕中规定选取，Z_{1m}、Z_{2m}轴可以不重合，失调几何参量ε_1、ε_1'、ε_2、ε_2'不一定满足（1）式。对这一问题可仿照对无相对失调系统的方法分析，但是应当使用多次坐标变换。我们将相对于第一失调系统的失调参考面取为RP_{1m}、RP_{2m}'，相对于第二失调系统的失调参考面取为RP_{2m}、RP_{3m}，详见图1，然后作如下坐标旋转和传输矩阵变换：

$RP_1 \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_{1m}$

$RP_{1m} \xrightarrow{\text{共轴传输}} RP_{2m}'$

$RP_{2m}' \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_2'$

$RP_2' \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_{2m}$

$RP_{2m} \xrightarrow{\text{共轴传输}} RP_{3m}$

$RP_{3m} \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_2$　（RP_2与RP_2'重合）

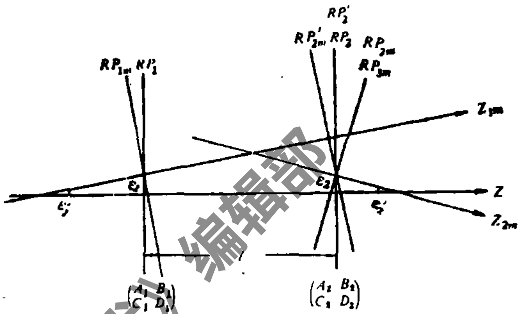

图1　有相对失调的光学系统

设在各参考面处的光线矢量分别用对应的$\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix}$（$r$为光线离光轴的距离，$\theta$为光线与光轴的夹角）来表示，在近轴近似（$\theta\approx\sin\theta\approx\mathrm{tg}\theta$，$\cos\theta\approx 1$）和系统小失调（数学处理中可略去二级以上小量）的条件下，上面的这些变换关系可用矩阵形式简单写为：

$$\left\{\begin{aligned}
\begin{pmatrix}r_{1m}\\ \theta_{1m}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r_1\\ \theta_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}r_{2m}'\\ \theta_{2m}'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{1m}\\ \theta_{1m}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}r_2'\\ \theta_2'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r_{2m}'\\ \theta_{2m}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}r_{2m}\\ \theta_{2m}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r_2'\\ \theta_2'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_2'\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}r_{3m}\\ \theta_{3m}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & l'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{2m}\\ \theta_{2m}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}r_2\\ \theta_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r_{3m}\\ \theta_{3m}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & l'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_2'\end{pmatrix}
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

式中，l'为RP_{3m}、RP_{2m}间轴向距离，在所讨论两个失调光学系统情况下，$l'=0$。由（2）式得到：

$$\begin{pmatrix}r_2\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\ \theta_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A_2-A & B_2+A_2 l-B\\ C_2-C & D_2+C_2 l-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-A_2 & -B_2\\ -C_2 & 1-D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_2'\end{pmatrix} \tag{3}$$

式中，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

为由RP_1至RP_2系统总的光线变换矩阵。由推导过程可见，因$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$中已含系统中可能存在的折射率突变介面的变换矩阵，所以l应为RP_1与RP_2'间的轴向几何长度，在小失调情况下，它也等于RP_{1m}与RP_{2m}'间轴向的几何距离。

对（3）式进行增广得：

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \tilde{\alpha}_1 \varepsilon_1 + \tilde{\alpha}_2 \varepsilon_2 & \tilde{\beta}_1 \varepsilon_1' + \tilde{\beta}_2 \varepsilon_2' \\ C & D & \tilde{\gamma}_1 \varepsilon_1 + \tilde{\gamma}_2 \varepsilon_2 & \tilde{\delta}_1 \varepsilon_1' + \tilde{\delta}_2 \varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

式中，失调矩阵元$\tilde{\alpha}_i$、$\tilde{\beta}_i$、$\tilde{\gamma}_i$、$\tilde{\delta}_i$（$i=1, 2$）为

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 = A_2 - A \\ \tilde{\beta}_1 = B_2 + A_2 l - B \\ \tilde{\gamma}_1 = C_2 - C \\ \tilde{\delta}_1 = D_2 + C_2 l - D \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_2 = 1 - A_2 \\ \tilde{\beta}_2 = - B_2 \\ \tilde{\gamma}_2 = - C_2 \\ \tilde{\delta}_2 = 1 - D_2 \end{cases} \tag{7}$$

（5）式中的4×4矩阵为有相对失调光学系统增广矩阵的一般形式，它是对无相对失调的失调光学系统的增广矩阵公式的推广。

二、公式应用举例

现举二例说明（5）式的应用。

1. 有相对失调的厚透镜

如图2，设厚透镜曲率半径分别为R_1、R_2的二端面有相对失调，厚透镜厚度l，折射率n，R_1、R_2正负规定与文献〔2〕相同，则：

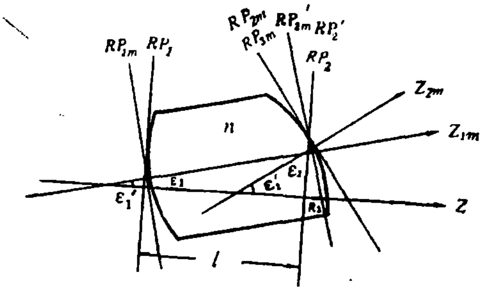

图2　有相对失调的厚透镜

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{(n-1)l}{nR_1} & \dfrac{l}{n} \\ -(n-1)\left[\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{(n-1)l}{nR_1R_2}\right] & 1-\dfrac{(n-1)l}{nR_2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \tag{9}$$

将（8）、（9）式代入（5）式得到：

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

式中，

$$\begin{cases} E = -\dfrac{(n-1)l}{nR_1}\varepsilon_1 \\ F = \dfrac{(n-1)l}{n}\varepsilon_1' \\ G = -(n-1)\left[\dfrac{\varepsilon_1}{R_1}-\dfrac{\varepsilon_2}{R_2}-\dfrac{(n-1)l\ \varepsilon_1}{nR_1R_2}\right] \\ H = (n-1)(\varepsilon_1'-\varepsilon_2')-\dfrac{(n-1)^2 l\varepsilon_1'}{nR_2} \end{cases} \tag{11}$$

A、B、C、D见（8）式。

2．薄透镜组

设图3中焦距为f_1、f_2的二薄透镜存在相对失调，薄透镜间距l，则：

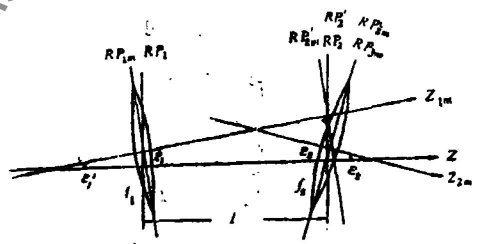

图3　有相对失调的薄透镜组

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-l/f_1 & l \\ -\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}-\dfrac{l}{f_1f_2}\right) & 1-l/f_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

由此得：

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

式中

$$
\left\{
\begin{aligned}
&E = \frac{l}{f_1}\varepsilon_1 \\
&F = 0 \\
&G = \frac{\varepsilon_1}{f_1} + \frac{\varepsilon_2}{f_2} - \frac{l\varepsilon_1}{f_1 f_2} \\
&H = 0
\end{aligned}
\right. \tag{15}
$$

A、B、C、D矩阵元如（12）式所示。

三、讨　　论

1．失调光学系统4×4增广矩阵的一般形式((5)式)在非失调和无相对失调的情况下，可约化为相应的形式。现证明如下：

（1）对共轴光学系统

$$
\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = 0 \tag{16}
$$

由（5）式得：

$$
\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}
$$

即

$$
\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{18}
$$

（2）当（1）式成立，即对无相对失调的失调光学系统，由（1）、（5）、(6)、（7）式得到：

$$
\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \alpha\varepsilon_1 & \beta\varepsilon_1' \\ C & D & \gamma\varepsilon_1 & \delta\varepsilon_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}
$$

式中，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\alpha = 1 - A \\
&\beta = l - B \\
&\gamma = -C \\
&\delta = 1 - D
\end{aligned}
\right. \tag{20}
$$

A、B、C、D矩阵元的公式见（4）式。显然，（19）式即为文献[1]中的（4）式。

2．当在RP_1、RP_2'处失调光学元件的失调矩阵

$$
M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i & \alpha_i\varepsilon_i & \beta_i\varepsilon_i' \\ C_i & D_i & \gamma_i\varepsilon_i & \delta_i\varepsilon_i' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$(i=1, 2)$已知的情况下，系统的失调增广

矩阵也可直接由M_1、M_2和空间距离矩阵的乘积得出，直接的计算就可证明，所得结果与（5）式相同，即

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & \alpha_2\varepsilon_2 & \beta_2\varepsilon_2' \\ C_2 & D_2 & \gamma_2\varepsilon_2 & \delta_2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \alpha_1\varepsilon_1 & \beta_1\varepsilon_1' \\ C_1 & D_1 & \gamma_1\varepsilon_1 & \delta_1\varepsilon_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & B & \tilde{\alpha}_1\varepsilon_1+\tilde{\alpha}_2\varepsilon_2 & \tilde{\beta}_1\varepsilon_1'+\tilde{\beta}_2\varepsilon_2' \\ C & D & \tilde{\gamma}_1\varepsilon_1+\tilde{\gamma}_2\varepsilon_2 & \tilde{\delta}_1\varepsilon_1'+\tilde{\delta}_2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

式中，

$$\begin{cases} \alpha_i=1-A_i \\ \beta_i=-B_i \\ \gamma_i=-C_i \\ \delta_i=1-D_i \end{cases} \tag{22}$$

$\tilde{\alpha}_i$、$\tilde{\beta}_i$、$\tilde{\gamma}_i$、$\tilde{\delta}_i$见（6）、（7）式。

3．本文推广了文献〔1〕的结果。所用方法可直接用来分析有多个相对失调（其中亦可包含有无相对失调单元）的复杂光学系统，条件是近轴近似和小失调假设成立。

作者对杭州大学王绍民教授、林强同志就本文有关问题所作有益讨论表示感谢。

参考文献

〔1〕 Wang Shaomin, Opt. & Quant. Electron., 1985, Vol. 17, No. 1, P. 1.

〔2〕 吕百达，《激光光学》，四川大学出版社，成都，1986年，第22页。

收稿日期：1988年12月2日。

·简　讯·

可重写的光盘

高级图象应用公司（AGA）已推出一种DISCUS可重写光盘系统，即是用于靠OS/2运转的MS-DOS的“插上就工作”的5¼in能重写的光盘系统，借助该公司设计的驱动器软件，DISCUS盘允许OS/2的使用者在650Mbyte的可重写光盘上存入、检索、修改或删去数据，因为OS/2型系统支持虚拟存贮器管理，故DISCUS可重写的光盘对充分利用大容量存贮器是很有用的。

译自 L. & O., 1988, Nov., P. 17.

杨友濂 译　　刘建卿 校