

高斯光束横向分布对激光器性能的影响

张纪岳

施 卫

(西北大学)

(陕西机械学院)

本文采用半经典激光理论,研究了稳定腔内高斯驻波场对激光器性能的影响,结果表明,高斯分布对激光器的阈值和频率牵引有明显的影。

Influence of Gaussian transverse distribution on laser performance

Zhang Jiyue

(Northwest University)

Shi Wei

(Shanxi Institute of Mechanical Engineering)

© Abstract

In this paper, the influence of Gaussian transverse distribution in the cavity on laser performance has been investigated with semiclassical theory. The result shows that the threshold and mode-pulling are related to the cavity length.

一、引 言

激光的半经典理论能够解释激光器的增益饱和,激光的频率牵引和推斥效应,多模耦合与模式竞争,位相锁定,增益曲线的烧孔效应,拉姆凹陷现象以及非稳运转等。一般的讨论都是将腔内的场视为振幅是时间的缓变函数的驻波场:

$$E(z,t) = E_a(t) \sin k_a z \cos[\omega_a t + \varphi_a(t)] \quad (1)$$

没有考虑因振幅在xy面内的不同分布对激光器的影响。这样,在运用激光的半经典理论研究问题时就会因忽略这一因素而不够全面^[1,2]。事实上,不同的振幅分布对激光器性能的影响的问题不仅重要,而且具有普遍性。

本文考虑腔内的场在xy面内振幅分布具有高斯函数形式,求解拉姆方程,并对结果进行分析。

二、高 斯 分 布

高斯光束及其参数如图 1 所示。其中

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2} \right)^2} \quad (2)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda R}{2\pi}} \quad (3)$$

设稳定腔内第 n 个模式的场的振幅分布具有高斯函数的形式

$$E(x, y, z, t) = E_n(t) \cdot e^{-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}} \cdot \text{sinc}_n z \cdot \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] \quad (4)$$

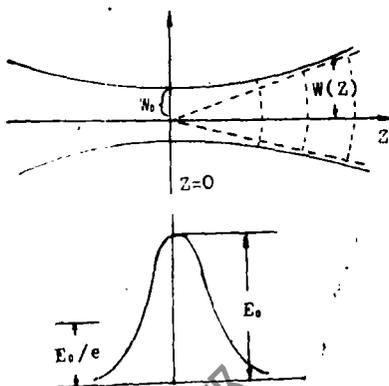


图 1 高斯光束

场与原子的相互作用项为

$$V = -DE_n(t) \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \cdot \text{sinc}_n z \cdot \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] \quad (5)$$

忽略相互作用时，方程

$$\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega_{ab} + \gamma) \rho_{ab} - \frac{i}{h} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) DE(x, y, z, t) \quad (6)$$

的解为

$$\rho_{ab} = \rho_{ab}(0) \cdot \exp[-(i\omega_{ab} + \gamma)t] \quad (7)$$

存在相互作用时，仍保持同样形式的解，视 $\rho_{ab}(0)$ 为时间的函数，则

$$\begin{aligned} & \dot{\rho}_{ab}(0) \exp[-(i\omega_{ab} + \gamma)t] - (i\omega_{ab} + \gamma) \rho_{ab}(0) \exp[-(i\omega_{ab} + \gamma)t] \\ &= -(i\omega_{ab} + \gamma) \rho_{ab}(0) \exp[-(i\omega_{ab} + \gamma)t] - \frac{i}{h} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) DE_n(t) \cdot \\ & \quad \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \text{sinc}_n z \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ab}(0) &= -\frac{i}{h} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) DE_n(t) \exp[(i\omega_{ab} + \gamma)t] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \text{sinc}_n z \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} \left[e^{i(\omega_n t + \varphi_n(t))} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n(t))} \right] = -\frac{i}{h} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) DE_n(t) \cdot \\ & \quad \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \text{sinc}_n z \{ \exp[i(\omega_n t + \varphi_n(t)) + i\varphi_n(t) + \gamma t] + \\ & \quad \exp[i(\omega_{ab} - \omega_n)t - i\varphi_n(t) + \gamma t] \} \quad (9) \end{aligned}$$

视 $E_a(t)$ 和 $\varphi_a(t)$ 为时间的缓变函数, 略去反共振项和暂态过程, 得

$$\begin{aligned} \rho_{ab} &= \frac{1}{2h} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})DE_a(t) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin k_a z}{(\omega_a - \omega_{ab}) + i\gamma} \exp[-i\omega_a t - i\varphi_a(t)] \\ &= \frac{1}{2h} N(z) DE_a(t) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin k_a z \frac{(\omega_a - \omega_{ab}) + i\gamma}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \cdot \\ &\quad \cdot \exp[-i\omega_a t - i\varphi_a(t)] \end{aligned} \quad (10)$$

式中已应用

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = N(z) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ba} = \rho_{ab}^* &= \frac{1}{2h} N(z) DE_a(t) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin k_a z \frac{(\omega_a - \omega_{ab}) + i\gamma}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \cdot \\ &\quad \cdot \exp[i\omega_a t + i\varphi_a(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

宏观电极化强度

$$P = D(\rho_{ab} + \rho_{ba})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{D^2}{2h} \frac{N(z) E_a(t) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin k_a z}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \{2(\omega_{ab} - \omega_a) \cos[\omega_a t + \varphi_a(t)] + \\ &\quad + 2\gamma \sin[\omega_a t + \varphi_a(t)]\} \end{aligned} \quad (13)$$

如果腔长=L, 则其空间富里叶分量为

$$\begin{aligned} P_a(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L P \sin k_a z \, dz \\ &= -\frac{D^2}{2h} E_a(t) \frac{2(\omega_{ab} - \omega_a) \cos[\omega_a t + \varphi_a(t)] + 2\gamma \sin[\omega_a t + \varphi_a(t)]}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2}{L} \int_0^L N(z) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin^2 k_a \, dz = -\frac{D^2}{2h} E_a(t) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2(\omega_{ab} - \omega_a) \cos[\omega_a t + \varphi_a(t)] + 2\gamma \sin[\omega_a t + \varphi_a(t)]}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2}{L} \bar{N} \int_0^L \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin^2 k_a \, dz \end{aligned} \quad (14)$$

式中已设

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = N(Z) = \bar{N} \quad (15)$$

对于积分

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^L \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \sin^2 k_z z \, dz \\
&= \int_0^L \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right)^2}\right] \sin^2 k_z z \, dz \\
&= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \int_0^L \exp\left[\frac{(x^2+y^2)\lambda^2}{\pi^2 W_0^6} z^2\right] \sin^2 k_z z \, dz
\end{aligned} \tag{16}$$

令
$$A^2 = \frac{(x^2+y^2)\lambda^2}{\pi^2 W_0^6} \tag{17}$$

于是

$$I = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \int_0^L e^{A^2 z^2} \sin^2 k_z z \, dz \tag{18}$$

注意到

$$\sin^2 k_z z = \frac{1}{2} [1 - \cos(2k_z z)] \tag{19}$$

以及光在腔内部沿腔轴方向形成的驻波条件

$$2L = n\lambda, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{20}$$

故

$$\begin{aligned}
I &= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} dz - \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} \cos(2k_z z) dz \right\} \\
&= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} dz - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{n\lambda}{2}} e^{A^2 z^2} \cos(2k_z z) dz \right\} \tag{21}
\end{aligned}$$

由于 $\cos(2k_z z)$ 是以 $\lambda_n/2$ 为周期的空间周期函数，而 $e^{A^2 z^2}$ 随 z 的变化远不如 $\cos(2k_z z)$ 随 z 的变化来的迅速，可以近似认为 $e^{A^2 z^2} \cos(2k_z z)$ 是以 $\lambda_n/2$ 为周期的空间周期函数，由周期函数的性质得

$$I = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} dz - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} e^{A^2 z^2} \cos(2k_z z) dz \right\} \tag{22}$$

实际上 $e^{A^2 z^2}$ 在波长范围内的变化很小，因此第二个积分中的 $e^{A^2 z^2}$ 可提到积分号外，则

$$\begin{aligned}
I &= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} dz - \frac{1}{2} e^{A^2 z^2} \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} \cos(2k_z z) dz \right\} \\
&= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2 z^2} dz \tag{23}
\end{aligned}$$

当激光器满足条件：

$$A^2 L^2 < 1 \tag{24}$$

(23)式中被积函数 $e^{A^2z^2}$ 可作级数展开。例如一台氩离子激光器，腔长0.5m，孔径4mm，波长为5145Å，高斯光束腰 $W_0=1.2\text{mm}$ ，取 $x=y=2\text{mm}$ 作估算：

$$A^2L^2 = \frac{(x^2+y^2)\lambda^2L^2}{\pi^2W_0^6}$$

$$= \frac{(2^2+2^2) \times (5145 \times 10^{-7})^2 \times (500)^2}{3.14^2 \times 1.2^6} = 0.018 < 1 \quad (25)$$

显然是满足 $A^2L^2 < 1$ 的条件，那么

$$I = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{1}{2} \int_0^L e^{A^2z^2} dz$$

$$= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 + A^2z^2 + \frac{1}{2}A^4z^4 + \dots\right) dz$$

$$= \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{3}A^2L^3 + \frac{1}{10}A^4L^5 + \dots\right) \quad (26)$$

故

$$P_n(t) = -\frac{D^2}{h} E_n(t) \frac{(\omega_{ab} - \omega_n) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] + \gamma \sin[\omega_n t + \varphi_n(t)]}{(\omega_n - \omega_{ab})^2 + \gamma^2}$$

$$\cdot \frac{2}{L} \bar{N} \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{3}A^2L^3 + \frac{1}{10}A^4L^5 + \dots\right) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right]$$

$$= -\frac{D^2}{h} E_n(t) \frac{(\omega_{ab} - \omega_n) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] + \gamma \sin[\omega_n t + \varphi_n(t)]}{(\omega_n - \omega_{ab})^2 + \gamma^2}$$

$$\cdot \bar{N} \left(1 + \frac{1}{3}A^2L^3 + \frac{1}{10}A^4L^5 + \dots\right) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \quad (27)$$

将式(27)与式

$$P_n(t) = C_n(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] + S_n(t) \sin[\omega_n t + \varphi_n(t)] \quad (28)$$

比较得

$$C_n(t) = -\frac{D^2}{h} E_n(t) \bar{N} \left(1 + \frac{1}{3}A^2L^3 + \frac{1}{10}A^4L^5 + \dots\right) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{\omega_{ab} - \omega_n}{(\omega_n - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \quad (29)$$

$$S_n(t) = -\frac{D^2}{h} E_n(t) \bar{N} \left(1 + \frac{1}{3}A^2L^3 + \frac{1}{10}A^4L^5 + \dots\right) \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right] \frac{\gamma}{(\omega_n - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \quad (30)$$

三、结 果

由拉姆自治方程

$$\begin{cases} \dot{E}_s(t) + \frac{\omega}{2Q_s} E_s(t) = -\frac{\omega}{2\varepsilon_0} S_s(t) & (31) \\ [\omega_s + \dot{\varphi}_s(t) - \omega_s] E_s(t) = -\frac{\omega}{2\varepsilon_0} C_s(t) & (32) \end{cases}$$

得到:

1. 阈值

将 (30) 式代入 (31) 式

$$\begin{aligned} \dot{E}_s(t) = & \left\{ \frac{\omega_s}{2\varepsilon_0} \frac{D^2 \bar{N}}{h} \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right] \right. \\ & \left. \cdot \frac{\gamma}{(\omega_s - \omega_{ss})^2 + \gamma^2} - \frac{2\omega_s}{2Q_s} \right\} E_s(t) \end{aligned} \quad (33)$$

如果场振幅随时间增加, 必有

$$\frac{D^2 \bar{N}}{\varepsilon_0 h} \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right] \frac{\gamma}{(\omega_s - \omega_{ss})^2 + \gamma^2} \geq \frac{1}{Q_s} \quad (34)$$

上式取等号时即得阈值的反转原子数

$$\bar{N} = \frac{\varepsilon_0 h [(\omega_s - \omega_{ss})^2 + \gamma^2]}{\gamma D^2 Q_s \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right]} \quad (35)$$

结果表明, 阈值与腔长因素 $\left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right)$ 和高斯因子 $\exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right]$

均成反比, 这与实验结果表征的激光放电管长度增加, 阈值电流减小, 放电管直径增加, 阈值电流增大的现象是吻合的。

下面分别讨论腔长 L , 高斯光束腰 W_0 和激光棒横截面对阈值的影响。

(1) 若高斯光束腰 W_0 和激光棒横截面一定, 则

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\varepsilon_0 h [(\omega_s - \omega_{ss})^2 + \gamma^2]}{\gamma D^2 Q_s \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right]} \\ &= \frac{C}{\left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right)} \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$C = \frac{\varepsilon_0 h [(\omega_s - \omega_{ss})^2 + \gamma^2]}{\gamma D^2 Q_s \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right]} \quad (37)$$

那么, 约化阈值为

$$\frac{\bar{N}}{C} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots\right)} \quad (38)$$

取氩离子激光器为例, 则当腔长L等于200mm, 500mm, 1000mm时, 分别计算出约化阈值为 740×10^{-6} , 19.4×10^{-6} , 1.21×10^{-6} 。图2给出约化阈值随腔长变化的关系曲线。

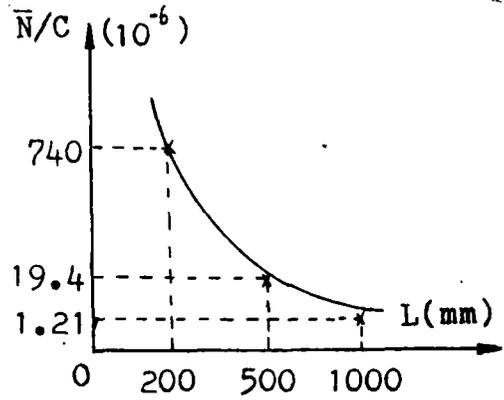


图2 约化阈值随腔长变化曲线

(2)若腔长和激光棒横截面一定, 则

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\epsilon_0 h [(\omega_a - \omega_{as})^2 + \gamma^2]}{\gamma D^2 Q_a \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right]} \\ &= C' \exp\left[\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right] \end{aligned} \quad (39)$$

其约化阈值为

$$\ln\left(\frac{\bar{N}}{C'}\right) = \frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \quad (40)$$

同样可以求得约化阈值随光腰 W_0 变化的关系曲线如图3所示。

(3)当腔长与高斯光束腰一定时, 设激光棒是半径为R的圆柱, 其横截面积为S, 取

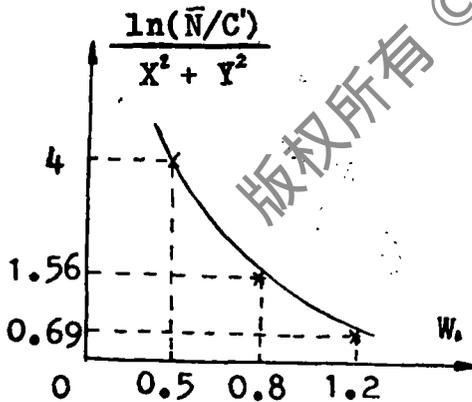


图3 约化阈值随 W_0 变化曲线

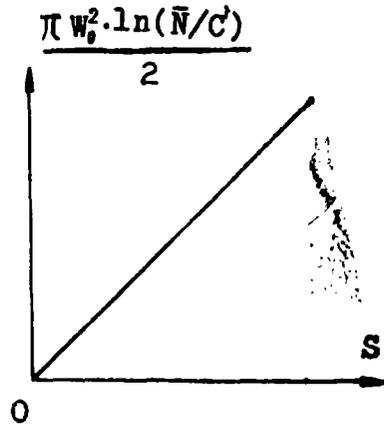


图4 约化阈值随激光棒横截面S的变化曲线

$$(x^2 + y^2)|_{max} = 2R^2 \quad (41)$$

作估算, 则

$$\bar{N} = C' \exp\left[\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right] = C' \exp\left[\frac{2R^2}{W_0^2}\right] = C' \exp\left[\frac{2S}{\pi W_0^2}\right] \quad (42)$$

式中

$$C' = \frac{\epsilon_0 h [(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2]}{\gamma D^2 Q_a \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right)} \quad (43)$$

那么, 约化阈值为

$$\frac{\pi W_0^2}{2} \ln \left(\frac{\bar{N}}{C'} \right) = S \quad (44)$$

约化阈值随激光棒横截面S变化的关系曲线如图4所示。

2. 频率特性

将(29)代入拉姆方程得

$$\omega_a + \phi_a(t) - \omega_a = \omega_a - \omega_{ab} = \frac{\omega_a D^2 \bar{N}}{2\epsilon_0 h} \left(1 + \frac{1}{3} A^2 L^2 + \frac{1}{10} A^4 L^4 + \dots \right) \cdot \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} \right] \frac{\omega_{ab} - \omega_a}{(\omega_a - \omega_{ab})^2 + \gamma^2} \quad (45)$$

显然, 腔长L和高斯因子对频率牵引效应也有影响。

在上述结果(35)式和(36)式中

$$A^2 = \frac{(x^2 + y^2) \lambda^2}{\pi^2 W_0^2} \quad (46)$$

很明显, 当x、y趋于零, 且 $(\omega_a - \omega_{ab}) \ll \gamma$ 时, 有

$$\bar{N} = \frac{\epsilon_0 h \gamma}{D^2 Q_a} \quad (47)$$

$$\omega_a - \omega_{ab} = \frac{D^2 \bar{N} \omega_a}{2\epsilon_0 h \gamma^2} (\omega_{ab} - \omega_a) \quad (48)$$

这正是一般的讨论所给出的结果[3]。

由以上可见, 当腔内场振幅在xy面的分布具有高斯函数的形式时, 其激光器的阈值和频率牵引效应不仅受到高斯因子的影响, 而且与腔长L有关。在x、y趋于零时则回到不考虑场振幅的空间分布时的结论。

参 考 文 献

- [1] 魏...，《激光杂志》，1986年，第7卷，第5期，第258页。
- [2] M. Sargent III et al., Laser Physics, 1974, London.
- [3] 周炳琨，《激光原理》，国防工业出版社，1984年11月第一版，第259页。
- [4] 朱如曾，《激光物理》，国防工业出版社。

作者简介: 张纪岳, 男, 1935年6月出生。教授。现从事光学与理论物理专业。

施卫, 男, 1957年11月出生。讲师。现从事大学物理, 激光物理, 非线性光学的教学和科研工作。

收稿日期: 1988年3月21日。