

文章编号：1001-3806(2003)02-0126-04

三维厄米-高斯光束经对称化系统的传输特性 *

吴 平

吕百达 **

(西南交通大学应用物理系,成都,610031) (四川大学激光物理与化学研究所,成都,610064)

摘要：用二阶矩分析法和广义惠更斯-菲涅耳衍射积分方法,对三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束通过对称化光学系统的变换特性作了详细的研究。研究结果表明,出射光束是完全对称化的。出射光束实现了二阶矩意义上的对称化,并且出射光束的光斑具有旋转对称性。对称化后的光束在自由空间传输时能保持其形状不变。

关键词：三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束;完全对称化;二阶矩

中图分类号：O435;TN012 文献标识码：A

Propagation properties of three-dimensional $TEM_{m,n}$ -mode Hermite-Gaussian beams through an optical symmetric system

Wu Ping

(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

L ÜBaida

(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: By using the second-order moments method and generalized Huygens-Fresnel diffraction integral, the transformation properties of a three-dimensional $TEM_{m,n}$ -mode Hermite-Gaussian beam passing through an optical symmetrizing system are studied in detail. It is shown that the symmetrization is complete, because, not only the symmetrizing transformation is achieved in the second-order moments sense, but also the output beam becomes a circular one, and then retains its shape unchanged upon propagation.

Key words: three-dimensional $TEM_{m,n}$ -mode Hermite-Gaussian beam; complete symmetrization; second-order moment

引 言

对称化的激光光束是许多激光应用中所需要的。在光束传输变换研究领域,人们对激光光束的对称化问题已进行了广泛的研究^[1~6]。有代表性的是 Laabs, Weber 和 Gao 等人用三柱透镜光学系统对厄米-高斯光束的对称化研究工作。用二阶矩分析法分析了三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束经过三柱透镜光学系统后出射光束参数的变换特性。说明经过三柱透镜光学系统后,三维非对称厄米-高斯光束参数实现了完全对称化,即:光束在实验室坐标系的 x, y 方向上具有相同的束宽、远场发散角、等相

位曲率半径和光腰位置,但光束出现了扭曲。另外,还从衍射积分的角度,用数值计算方法,得到了三维非对称厄米-高斯光束经过三柱透镜光学系统后,光强的空间分布。从光强的空间分布可以清楚地看到:三维非对称厄米-高斯光束被对称化了,并且对称化后的光束在自由空间传输过程中能保持对称化特性不变。

1 用二阶矩矩阵法分析对称化光学系统对三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束的变换特性

由描述光束的二阶矩理论知^[1~5]:任何光束都可用 10 个独立参数组成的方差矩阵或称为二阶矩矩阵表示为:

$$V = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xu & xv \\ xy & y^2 & yu & yv \\ xu & yu & u^2 & uv \\ xv & yv & uv & v^2 \end{bmatrix},$$

* 西南交通大学校科学基金和国家高技术光束控制重点实验室基金资助项目。

** 西南交通大学客座教授。

作者简介:吴 平,女,1965 年 4 月出生。副教授,博士。主要从事气体激光器和激光光束传输变换研究。

收稿日期:2001-12-18

式中, x^2 , y^2 与光束束宽有关, u^2 , v^2 与光束的远场发散角有关, xu , yv 与光束的等相位曲率半径有关, xu , yv 与光束扭曲参数有关, xy 与光束的近场方位角有关, uv 与光束的远场方位角有关。

在实验室坐标系下, $z = 0$ 平面处, 三维

$$V_0 = \begin{bmatrix} (2m+1)w_{0x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2n+1)w_{0y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{w_{0x}^2 + w_{0y}^2}}\right)^2 (2m+1)/w_{0x}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

在许多实际应用中, 光束的瑞利长度是一个重要的参数。瑞利长度定义为:

$$z_{Rx}^2 = \frac{x^2}{u^2}, z_{Ry}^2 = \frac{y^2}{v^2} \quad (3)$$

从(2)式中可以看到:光束 V 在 x , y 方向上的瑞利长度是不相等的。但是通过一非对称望远镜系统 S_1 后, 可以得到相等的瑞利长度。 S_1 的矩阵表示式见右:

$$V_1 = \begin{bmatrix} (2m+1)w_{0y}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2n+1)w_{0y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{w_{0y}^2}}\right)^2 (2m+1)/w_{0y}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

该光束在 x 方向和 y 方向的瑞利长度为:

$$z_{Rx}^2 = z_{Ry}^2 = z_R = \left(\frac{1}{\sqrt{w_{0y}^2}}\right)^2 w_{0y}^4 \quad (7)$$

取 $f = z_R = \left(\frac{1}{\sqrt{w_{0y}^2}}\right) w_{0y}^2$ 。

对称化三柱透镜系统用矩阵 S_2 表示为^[1]:

$$V_2 = \begin{bmatrix} (m+n+1)w_{0y}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m+n+1)w_{0y}^2 & -\left(\frac{1}{f}\right)(m-n) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{f}\right)(m-n) & \left(\frac{1}{f}\right)^2 \frac{(m+n+1)}{w_{0y}^2} & 0 \\ \left(\frac{1}{f}\right)(m-n) & 0 & 0 & \left(\frac{1}{f}\right)^2 \frac{(m+n+1)}{w_{0y}^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

经三柱透镜系统后, 光束束腰位置 z_{0x} , z_{0y} , 光束在任意位置的束宽 w_x , w_y , 光束的远场发散角 x , y 和光束的有效曲率半径 R_x , R_y 由下式计算得出^[5]:

(1) 光束在实验室坐标系的 x , y 方向的光束束宽

$$w_x = 2\sqrt{x^2} = 2\sqrt{(m+n+1)}w_{0y},$$

$$w_y = 2\sqrt{y^2} = 2\sqrt{(m+n+1)}w_{0y} \quad (10)$$

(2) 远场发散角

$TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束的场分布表示为:

$$E_{mn}(x, y, 0) = H_m(\sqrt{2}x/w_{0x})H_n(\sqrt{2}y/w_{0y}) \times \exp[-(x^2/w_{0x}^2 + y^2/w_{0y}^2)] \quad (1)$$

式中, w_{0x} , w_{0y} 分别表示光束在 x , y 方向的束腰。由(1)式描述的厄米-高斯光束参数的二阶矩阵表示为:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/f & 0 \\ 0 & 0 & 1/f \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $f = w_{0y}/w_{0x}$, $f = 1$ 。光束通过一阶光学系统的变换由右式描述: $V_1 = SV_0S^T$ (5)

设 V_0 通过非对称望远镜系统 S_1 后出射光束为 V_1 , 将(2)式、(4)式代入(5)式得到:

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & f & f \\ 1 & -1 & f & f \\ -1/f & -1/f & -1 & 1 \\ -1/f & -1/f & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

光束 V_1 经过三柱透镜系统 S_2 后, 在 $z = 2f$ 处出射光束 V_2 的矩阵表示为:

$$x = 2\sqrt{u^2} = 2\sqrt{(m+n+1)} \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} / w_{0y},$$

$$y = 2\sqrt{v^2} = 2\sqrt{(m+n+1)} \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} / w_{0y} \quad (11)$$

(3) 等相位曲率半径 $R_x^{-1} = xu/x^2 = 0$,

$$R_y^{-1} = yv/y^2 = 0 \quad (12)$$

(4) 光腰位置 $z_{0x} = -xu/u^2 = 0$,

$$z_{0y} = -yv/v^2 = 0 \quad (13)$$

从(10)式~(13)式可以看到:任意的厄米-高斯光束

V_0 经过光学系统 $S_0 = S_2 S_1$ 后, 出射光束在 x, y 方向上具有相等的光束束宽、远场发散角、等相位曲率半径和光腰位置, 光束被对称化了。但对称化后, 光束变换为扭曲光束。其扭曲参数为:

$$t = (xv - yu)/2 = (/) (m - n) \quad (14)$$

TEM_{m, n} 厄米-高斯光束的扭曲程度由初始光束参数 m, n 决定。对 $m = 5, n = 9, = 1.06\mu\text{m}$, 厄米-高斯光束的扭曲参数 $t = -1.35\text{mm} \cdot \text{mrad}$ 。 m, n 的差值越大, 光束扭曲越严重。

2 三维 TEM_{m, n} 模厄米-高斯光束经过对称化光学系统的变换特性的数值计算例

如果已知三维 TEM_{m, n} 模厄米-高斯光束的场分布, 根据光束参数的二阶矩定义^[5]:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \int x^2 E_{mn}(x, y) \cdot E_{mn}^*(x, y) dx dy \\ y^2 &= 4 \int y^2 E_{mn}(x, y) \cdot E_{mn}^*(x, y) dx dy \\ u^2 &= \left(\int \frac{\partial}{\partial x} E_{mn}(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_{mn}^*(x, y) dx dy \right)^2 \\ v^2 &= \left(\int \frac{\partial}{\partial y} E_{mn}(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} E_{mn}^*(x, y) dx dy \right)^2 \\ xu &= -i \int [xE_{mn}(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_{mn}^*(x, y) + \\ &\quad xE_{mn}^*(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_{mn}(x, y)] dx dy \\ yv &= -i \int [yE_{mn}(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} E_{mn}^*(x, y) + \\ &\quad yE_{mn}^*(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} E_{mn}(x, y)] dx dy \quad (15) \end{aligned}$$

式中, E^* 表示 E 的复共轭。

将(15)式代入(10)式~(13)式, 可以得到三维 TEM_{m, n} 模厄米-高斯光束在经过对称化系统前后的光束参数。

对 TEM_{m, n} 模厄米-高斯光束经过对称化光学系统的光强分布, 应当用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分方法计算, 由场分布为(1)式所表示的三维 TEM_{m, n} 模光束经过非对称光学系统 S 变换后, 出射光场分布为^[7]:

$$E_{m, n}(x_2, y_2) = \frac{i k \exp(-i k L)}{2 \sqrt{\det B}} E_{m, n}(x_1, y_1) \times \exp \left\{ -\frac{i k}{2} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B^{-1} A & -B^{-1} \\ -(B^{-1})^T & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\} dx_1 dy_1 \quad (16)$$

式中, $S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 。

将(16)式代入(15)式和(10)式~(13)式可得三维 TEM_{m, n} 模厄米-高斯光束经过对称化光学系统后光强 $I_{m, n}(x_2, y_2, z_2) = |E_{m, n}(x_2, y_2, z_2)|^2$ 的分布。现以数值计算例说明上述方法的应用。

设 $m = 5, n = 9$, 光束参数: $w_{0x} = 1.5\text{mm}$, $w_{0y} = 0.5\text{mm}$, $R_{0x} = R_{0y} = 0$, $= 1.06\mu\text{m}$ 。三维 TEM_{5,9} 模厄米-高斯光束在经过对称化光学系统前在入射面上光束参数的二阶矩矩阵为:

$$V_0 = \begin{bmatrix} 24.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.65 \end{bmatrix},$$

式中, x^2, u^2 的单位分别是: $\text{mm}^2, \text{mrad}^2$; y^2, v^2 的单位分别是 $\text{mm}^2, \text{mrad}^2$ (下同)。

由(16)式、(15)式、(10)式和(12)式计算得出三维 TEM_{5,9} 模厄米-高斯光束束宽和等相位曲率半径在自由空间中随传输距离(入射面处 $z = 0$)变化曲线如图 1 所示。

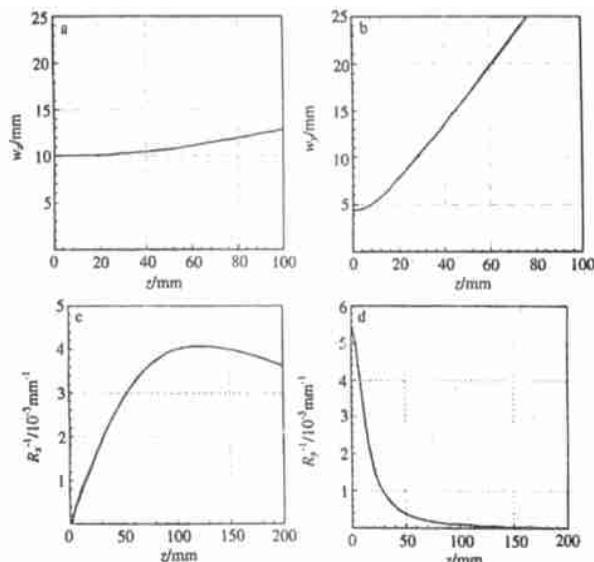


Fig. 1 Change in beam widths w_x, w_y and effective radii of curvature R_x^{-1}, R_y^{-1} of a TEM_{5,9} mode Hermite-Gaussian beam propagating in free space

a - the beam width w_x in the x -direction b - the beam width w_y in the y -direction c - the effective radius of curvature R_x^{-1} in the x -direction d - the effective radius of curvature R_y^{-1} in the y -direction

从图 1 可以看到, 三维 TEM_{5,9} 模厄米-高斯光束在自由空间中传输光束在 x, y 方向的束宽不相等; 等相位曲率半径也不相等。计算可得光束在 x, y 方向的远场发散角 $x = 0.764\text{mrad}, y = 2.74\text{mrad}$ 也不相等。

经过对称化光学系统后, 用二阶矩方法由(9)式

和(5)式或用衍射积分和二阶矩定义由(16)式、(15)式、(10)式和(12)式计算出射面上光束参数的二阶矩矩阵,所得结果相同均为:

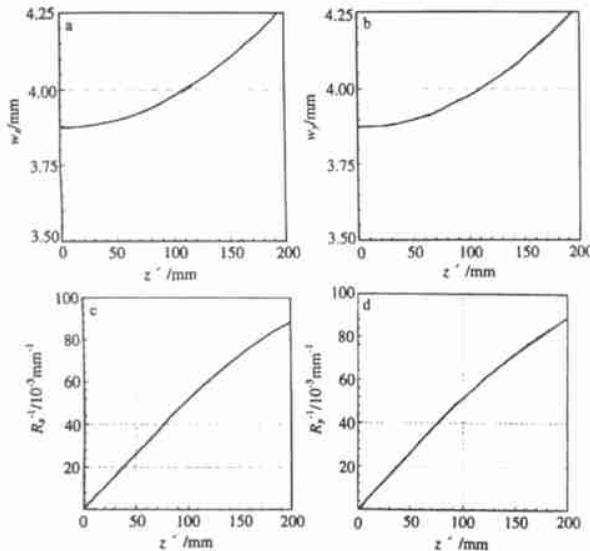


Fig. 2 Change in beam widths w_x , w_y and effective radii of curvature R_x^{-1} , R_y^{-1} of a $TEM_{5,9}$ mode Hermite-Gaussian beam propagating in free space after passing through the optical symmetrizing system, where $z = 0$ at $z = 2f$
 a - the beam width w_x in the x -direction b - the beam width w_y in the y -direction c - the effective radius of curvature R_x^{-1} in the x -direction d - the effective radius of curvature R_y^{-1} in the y -direction

$$V = \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & 0 & -1.35 \\ 0 & 3.75 & 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 & 6.83 & 0 \\ -1.35 & 0 & 0 & 6.83 \end{bmatrix},$$

式中, xv , yu 的单位是 $\text{mm} \cdot \text{mrad}$, 其余同前。

三维 $TEM_{5,9}$ 模厄米-高斯光束在经过对称化光学系统后, 在自由空间束宽和等相位曲率半径随传输距离变化曲线如图 2 所示。图中 $z = 0$ 平面与 $z = 2f$ 平面重合。

从图中清楚地看到:光束在 x , y 方向有相等的束宽、相等的等相位曲率半径。用同样的方法可以得到光束在 x , y 方向的远场发散角为: $x = y = 2.613 \text{ mrad}$, 两个方向的远场发散角相等, 光腰位置相同, 均在 $z = 2f$ 处。

三维 $TEM_{5,9}$ 模厄米-高斯光束通过三柱透镜对称化光学系统前后入射面($z = 0$)上和出射面($z = 2f$)上光束的三维光强分布可用广义衍射积分计算得到, 如图 3 所示。

由图可知, 图 3a 所示的非对称 $TEM_{5,9}$ 模厄米-高斯光束在经三柱透镜系统后, 出射光束光强分布具有圆对称性(见图 3b)。对称化后的光束继续在自由空间传输时能保持其形状不变(见图 3c, $z = 2f$)。

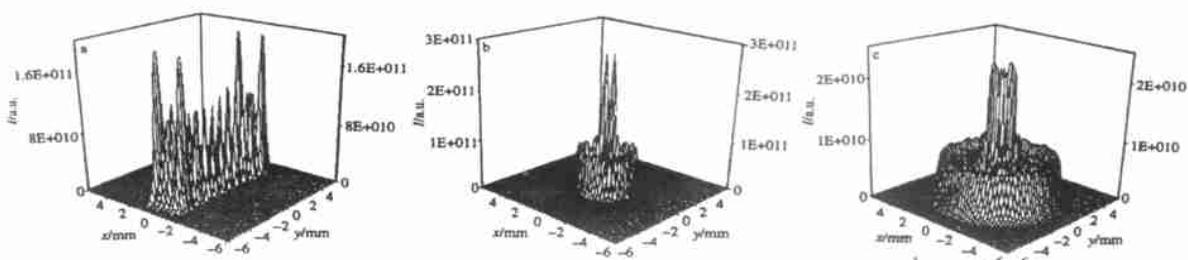


Fig. 3 Intensities distributions of a $TEM_{5,9}$ mode Hermite-Gaussian beam a - at the input plane $z = 0$ b - at the plane $z = 2f$ c - at the plane $z = 5f/2$

3 结 论

使用二阶矩和广义衍射积分方法, 对三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束通过三柱透镜对称化光学系统光束参数的变换作了详细研究, 说明三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束通过该光学系统实现了光束参数的对称化。一般情况下, 出射的对称化光束为扭曲光束, 其扭曲程度与输入光束的波长、模式阶数有关。进一步, 用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分方法, 得到三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束在经过对称化光学系统前后光束参数随传输距离的变化曲线和光强分布图。从光束参数变化曲线和光强分布图中可以清楚地看到: 三维 $TEM_{m,n}$ 模厄米-高斯光束被

完全对称化了。文中所用的光束变换的分析方法, 在光束传输变换中具有普遍意义, 令 $n = 0$ 就可得到 $TEM_{m,0}$ 模厄米-高斯光束的有关结果, 并且还可推广用于其它三维光束的对称化问题研究, 有关结果将另文发表。

参 考 文 献

- [1] Laabs H, Gao C. J Mod Opt, 1999, 46(4): 709 ~ 719.
- [2] Eppich B, Gao C. Opt Laser Technol, 1998, 30: 337 ~ 340.
- [3] Eppich B, Fiberg A T. SPIE, 1996, 2870: 260 ~ 267.
- [4] Gao C, Laabs H. Opt Quant Electron, 1999, 34: 1207 ~ 1218.
- [5] Gao C. Characterization and transformation of astigmatic laser beams. Berlin: Wissenschaft und Technik Verlag, 1999: 19 ~ 52.
- [6] Tamm C, Weiss C O J O S A, 1990, B7: 1034 ~ 1038.
- [7] Collins S A J O S A, 1970, A1: 1168 ~ 1177.