

文章编号: 1001-3806(2017)02-0289-07

# 全变差噪声消除问题的半光滑牛顿法

王 满<sup>1</sup>, 文有为<sup>2</sup>, 陈智斌<sup>1\*</sup>

(1. 昆明理工大学 理学院 数学系, 昆明 650500; 2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 长沙 410006)

**摘要:** 为了达到全变差噪声消除的图像去噪目的, 将去噪问题转换为优化问题。采用了结合广义最小残差法的半光滑牛顿法来解决相关优化问题, 求解非对称线性方程组, 进行了理论分析和实验验证, 取得了将该方法与其它方法应用于 1 维信号、2 维图像去噪实验的大量可行数据。结果表明, 结合广义最小残差法的半光滑牛顿法的收敛速度比结合预处理共轭梯度法的半光滑牛顿法和交替方向乘子法更快, 而且能够有效地消除噪声。

**关键词:** 图像处理; 全变差; 半光滑牛顿法; 广义最小残差法; 交替方向乘子法

中图分类号: TN911.73 文献标志码: A doi:10.7510/jgjs. issn. 1001-3806. 2017. 02. 029

## Semi-smooth Newton method for total variation noise removal

WANG Man<sup>1</sup>, WEN Youwei<sup>2</sup>, CHEN Zhibin<sup>1</sup>

(1. Department of Mathematics, Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China;  
2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410006, China)

**Abstract:** In order to remove the noise of image based on total variation, the denoising problem was converted to optimization problem. Semi-smooth Newton method incorporated by generalized minimum residual method was used to solve the associated optimization problem and non-symmetric linear equations. After theoretical analysis and experimental verification, a great deal of feasible data of removal noise experiment for 1-D signal and 2-D image were obtained by different methods. The results show that semi-smooth Newton method incorporated by generalized minimum residual method converges faster than that incorporated by preconditioned conjugate gradients method and alternating direction method of multipliers algorithm. The proposed method can remove the noise of image effectively.

**Key words:** image processing; total variation; semi-smooth Newton method; generalized minimum residual method; alternating direction method of multipliers algorithm

## 引言

在获取图像的过程中, 获取的图像不可避免地受到噪声的干扰。图像的噪声可以理解为影响人的视觉器官或传感器对所接收图像源信息进行理解或分析的各种因素。它对图像的输入、采集和处理的各个环节, 以及输出结果的全过程都有影响。因此消除噪声已成为图像处理中极重要的问题。数字图像的噪声主要来源于图像的获取和传输过程。常见的噪声有: 白噪声、冲击噪声、量化噪声、椒盐噪声。本文中考虑白噪声的一个特例——高斯噪声的消除。

最近几年涌现了许多数字图像处理的方法, 半光滑牛顿法 (semi-smooth Newton method, SSN)<sup>[1-6]</sup> 也是

其中一种, 即采用光滑函数来逼近不可微目标函数。随着对半光滑问题研究的不断深入, 该方法得到迅速的发展, 是最优化领域中极其活跃的研究方向之一。利用半光滑牛顿法求解最优化问题时, 由于线性方程组系数矩阵可能是病态的, 常采用 Tikhonov 正规化方法<sup>[7]</sup> 进行求解。目前采用的 SSN 在求解非对称线性方程组的计算时间长、收敛速度慢。文中将继续探究怎样利用半光滑牛顿法快速求解非对称线性方程组。

本文中首先给出图像去噪模型, 其次介绍最优化问题的最优化条件和求解该条件的结合广义最小残差法 (generalized minimum residual method, GMRES)<sup>[7-9]</sup> 的半光滑牛顿法, 并分析其局部超线性收敛性, 然后利用数值结果验证该算法的性能并与其它算法作比较, 最后得出结论。

## 1 模型介绍

在数学上, 去噪模型表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}$  是原始数据或无噪声数据,  $\boldsymbol{\eta}$  是服从高斯分布的随机噪声,  $\mathbf{y}$  是观察到的数据。由于观察到的图像是带有噪声的, 所以要解决的问题是怎样由观察到的数据  $\mathbf{y}$  估计原始数据  $\mathbf{x}$ 。

图像去噪的本质是一个病态的反问题<sup>[10]</sup>。所谓病态即不适用, 反问题的不适用性对相应问题的数值解法将产生本质的影响。正则化理论<sup>[11-12]</sup>常用来处理这种病态问题。(1)式的噪声为高斯白噪声, 原始数据可以通过求解下面的最小二乘正则化问题来估计:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 \quad (2)$$

式中, 第 1 项为数据拟合项, 反映了观察图像对原始图像的逼近程度; 第 2 项为正则项,  $\lambda$  为正则化参数, 用来平衡近似解的逼近程度和平滑性;  $\mathbf{A}$  为差分矩阵;  $\|\cdot\|_2$  表示 2-范数,  $\|\cdot\|_1$  表示 1-范数。

由于 1-范数的不可微性, 求解最小化问题(2)式的稳定性和有效性将会变得困难。

定义共轭函数。设函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 定义函数  $f^*: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 。则有  $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \text{dom } f} (\mathbf{y}^T \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$ , 称此函数为函数  $f$  的共轭函数<sup>[13]</sup>。其中  $\mathbf{R}$  为实数空间,  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  维实数空间,  $\text{dom } f$  为函数  $f$  的定义域,  $T$  表示转置。

利用共轭函数定义<sup>[13-14]</sup>, 知道  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1$  可表示为  $\max_{\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1} \mathbf{z}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ 。从而(2)式转化为:

$$\max_{\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1} \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{z}$  是一个对偶变量,  $\|\cdot\|_\infty$  表示无穷范数。

由于(2)式中 1-范数的不可微性和高斯白噪声的随机性, 想要稳定的解出  $\mathbf{x}$  是困难的, 而(3)式对变量  $\mathbf{x}$  是可导的。与最优化问题(2)式相比, 最小化问题<sup>[15]</sup> (3)式可以转换成一个带约束的最小二乘问题。(3)式关于变量  $\mathbf{x}$  的解为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{z} \quad (4)$$

将(4)式代回(3)式, 则对偶变量  $\mathbf{z}$  是如下优化问题的解:

$$\min_{\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{\lambda} \right\|_2^2 \quad (5)$$

反过来, 只需求出  $\mathbf{z}$ , 然后代入(4)式即可求解出  $\mathbf{x}$ 。传统上, 基于投影的梯度下降法、半隐性梯度法等用来求解(5)式。但是这些方法需要的迭代次数多, 收敛速度慢。下一节中将运用具有超线性收敛速度的半光滑牛顿法来解(5)式。

## 2 结合 GMRES 的半光滑牛顿法

在这一节中, 首先导出最优化问题(5)式的最优

化条件, 然后介绍最优化条件的半光滑性, 最后利用结合 GMRES 的半光滑牛顿法对其求解以及分析该算法的优越性——局部超线性收敛性。

### 2.1 最优化条件

引入 Lagrange 乘子, 将有约束问题的(5)式转化为无约束问题:

$$\min_{\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{\lambda} \right\|_2^2 + \sum_{i=0}^n \boldsymbol{\alpha}_i (1 - z_i^2) \quad (6)$$

由此可得最优化条件:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{\lambda} \right) + 2\boldsymbol{\alpha} \mathbf{z} = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_i (1 - z_i^2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i, (i=j) \\ 0, (i \neq j) \end{cases}$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

由于  $\boldsymbol{\alpha}_i \geq 0, 1 - z_i^2 \geq 0$ , (7)式的第 2 个式子也称为互补问题<sup>[14]</sup>。

### 2.2 最优化条件的半光滑性

定义 F-B 函数。对于互补问题, 利用由:

$$\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b \quad (8)$$

定义的 Fischer-Burmeister(F-B) 函数<sup>[13]</sup>  $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  来进行定式。其中  $a \geq 0, b \geq 0$ 。

利用函数  $\varphi$  定义  $\psi_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 函数:  $\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_i, F_i(\mathbf{x}))$ , 并令  $\psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x}))^T$ , 则关于向量值函数  $\psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  的方程  $\psi(\mathbf{x}) = 0$  与互补问题等价。但  $\psi$  在满足  $\mathbf{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = 0$  的  $\mathbf{x}$  处不可微, 称为非光滑方程组。这也是大家熟知的非线性互补问题 (nonlinear complementarity problem, NCP), 本文中采用半光滑牛顿法求解这类非光滑方程组。下面引入次微分及牛顿导数的定义。

定义次微分。记  $\varphi$  可微的点的全体构成的集合为  $S_\varphi$ , 定义:

$$\partial_B \varphi(\mathbf{x}) = \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(k)} \subseteq S_\varphi \right\} \quad (9)$$

该式称为  $\varphi$  在  $\mathbf{x}$  处的次微分或 Bouligand 次微分 (简记为 B 次微分)<sup>[16]</sup>。

定义牛顿/弱可微。假定  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, \mathbf{x} \in \text{int dom } f$ , 函数  $f$  在  $\mathbf{x}$  处牛顿可微的定义是, 存在矩阵  $\mathbf{D}f(\mathbf{z}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  满足:

$$\lim_{\mathbf{z} \in \text{dom } f, \mathbf{z} \neq \mathbf{x}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{z})(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2} = 0 \quad (10)$$

则称  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  在点  $\mathbf{x}$  是牛顿(或弱)可微的, 且将  $\mathbf{D}f(\mathbf{z})$  称为  $f$  在  $\mathbf{x}$  处的牛顿导数<sup>[7]</sup>(或弱函数)。

众所周知,局部 Lipschitz 连续函数均是牛顿可微的(Rademacher 定理<sup>[16]</sup>)。它在  $\mathbf{x}$  处的 Clarke 次微分与 B 次微分之间的关系式  $\partial\varphi(\mathbf{x}) = \text{co}(\partial_B\varphi(\mathbf{x}))$  成立。其中  $\text{co}(\partial_B\varphi(\mathbf{x}))$  表示  $\partial_B\varphi(\mathbf{x})$  的凸包。

由于 F-B 函数是局部 Lipschitz 连续函数,则其 Clarke 次微分可由下式给出:

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a, b) = \\ \begin{cases} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^T, & ((a, b) \neq (0, 0)) \\ (1 - \xi, 1 - \eta)^T | \xi^2 + \eta^2 \leq 1, & ((a, b) = (0, 0)) \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

由 F-B 函数的定义,令 F-B 函数为:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{z}_i) = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} - \\ \boldsymbol{\alpha}_i - (1 - \mathbf{z}_i^2) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

由于(12)式是牛顿可微的和局部 Lipschitz 连续的,则 Clarke 次微分为:

$$\begin{aligned} \partial f(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{z}_i) = \\ \begin{cases} \left[\frac{-2\mathbf{z}_i(1 - \mathbf{z}_i^2)}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2}} + 2\mathbf{z}_i, \frac{\boldsymbol{\alpha}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2}} - 1\right]^T, & ((\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) \neq (0, 0)) \\ (2\mathbf{z}_i + \xi, 1 - \eta)^T | \xi^2 + \eta^2 \leq 1, & ((\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) = (0, 0)) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

根据 F-B 函数的定义可将最优化条件(7)式变形为:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{z} - \mathbf{y} \lambda^{-1}) + 2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z} = 0 \\ \sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} - \boldsymbol{\alpha}_i - (1 - \mathbf{z}_i^2) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

运用 Taylor 展式得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{H} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + 2\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{z} - \mathbf{y} \lambda^{-1}) + 2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{C}_2 = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} - \boldsymbol{\alpha}_i - (1 - \mathbf{z}_i^2)$ ;  $\delta_z$  和  $\delta_\alpha$  表示迭代步长。

当  $(\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) \neq (0, 0)$  时,  $\mathbf{H}$  是以  $\mathbf{H}_1 = -2\mathbf{z}_i(1 - \mathbf{z}_i^2)/\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} + 2\mathbf{z}_i$  为对角线元素的对角矩阵,  $\mathbf{K}$  是以  $\mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\alpha}_i/\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} - 1$  为对角线元素的对角矩阵。当  $(\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) = (0, 0)$  时,  $\mathbf{H}$  是以  $\mathbf{H}_2 = 2\mathbf{z}_i + \xi$  为对角线元素的对角矩阵,  $\mathbf{K}$  是以  $\mathbf{K}_2 = 1 - \eta$  为对角线元素的对角矩阵, 且  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ 。

## 2.3 GMRES 方法与半光滑牛顿法

传统在解线性方程组(15)式时<sup>[3]</sup>, 利用了预处理共轭梯度法(preconditioned conjugate gradients method,

PCG)<sup>[17-18]</sup>。这种方法是处理大型病态方程组的有效数值迭代算法,对矩阵进行预处理使条件数大大减小,从而减小其病态性。但由于 PCG 方法是一种数值迭代方法,主要求解对称的线性方程组,而(15)式的系数矩阵为非对称矩阵,如果应用 PCG,那么必须先转化为正规方程组,增加了计算量,影响 SSN 最终的计算时间。所以接下来,介绍求解该非对称线性方程组的另一种方法——GMRES,并利用数值实验对比整体效果。

广义最小残差法于 1986 年由 SAAD 和 SCHULTZ 提出<sup>[7]</sup>,最吸引人的地方在于算法的高效性和稳定性。每一步只需要进行少量(1 个或 2 个)矩阵向量的乘积,与解同样非线性方程组的其它方法相比具有存储量少的特点,并且能充分利用矩阵的稀疏结构,计算过程不再需要单独对矩阵进行存储,从而大大节约了内存,且易于进行计算。

GMRES 算法的具体步骤如下:

$$\begin{aligned} (1) \text{ 选初始迭代向量 } \mathbf{x}^{(0)}, \text{ 计算残量 } \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{G}\mathbf{x}^{(0)} \text{ 和初始正交向量 } \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} / \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2. \\ (2) \text{ 对 } j = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, j. \\ \begin{cases} \mathbf{h}^{(i,j)} = (\mathbf{G}\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(i)})^T, \hat{\mathbf{v}}^{(j+1)} = \mathbf{G}\mathbf{v}^{(j)} - \sum_{i=1}^j \mathbf{h}^{(i,j)} \mathbf{v}^{(i)} \\ \mathbf{h}^{(j+1,i)} = \|\hat{\mathbf{v}}^{(j+1)}\|_2, \mathbf{v}^{(j+1)} = \hat{\mathbf{v}}^{(j+1)} / \mathbf{h}^{(j+1,i)} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

(3) 形成近似解  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{u}^{(k)}$ , 其中  $\mathbf{u}^{(k)}$  为最小二乘问题的解:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{(k)}\|_2 &= \|\mathbf{b} - \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{u}^{(k)})\|_2 = \\ \|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{G}\mathbf{u}^{(k)}\|_2 &= \min \{ \|\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{G}\mathbf{u}\|_2 \} \end{aligned} \quad (17)$$

利用此方法对(15)式求解  $\delta_z$  和  $\delta_\alpha$ , 然后代入迭代公式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(k)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_\alpha \end{bmatrix} \quad (18)$$

解得最优值  $\mathbf{z}$ , 最后代回(4)式可求得最优解  $\mathbf{x}$ 。

结合 GMRES 的半光滑牛顿法见下。其中, 函数为:  $\mathbf{x} = f_{\text{SSN}}(\mathbf{y}, \mathbf{A}, \lambda)$ 。输入为:  $\mathbf{y}, \mathbf{A}, \lambda$ 。

(1) 初始化  $\mathbf{z}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)}$ 。

(2) for  $k = 1 : c$ , 其中  $c$  为最大迭代次数。

(3) 用半光滑牛顿法求解(14)式的第 2 个式子:

$$\partial f(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{z}_i) = \begin{cases} (\mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1)^T, & ((\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) \neq (0, 0)) \\ (\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_2)^T, & ((\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) = (0, 0)) \end{cases} \quad (19)$$

式中,当  $(\boldsymbol{\alpha}_i, 1 - \mathbf{z}_i) \neq (0, 0)$  时,  $\mathbf{H}_1$  是以  $-2\mathbf{z}_i(1 - \mathbf{z}_i^2)/\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} + 2\mathbf{z}_i$  为对角线元素的对角矩阵,  $\mathbf{K}_1$  是以  $\boldsymbol{\alpha}_i/\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^2 + (1 - \mathbf{z}_i^2)^2} - 1$  为对角线元素的

对角矩阵;当 $(\alpha_i, 1 - z_i) = (0, 0)$ 时, $\mathbf{H}_1$ 是以 $2z_i + \xi$ 为对角线元素的对角矩阵, $\mathbf{K}_1$ 是以 $1 - 1 - \eta$ 为对角线元素的对角矩阵,且 $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ 。

(4) 通过求解(18)式更新 $\mathbf{z}$ 和 $\alpha$ 。

(5) 当迭代次数达到 $c$ 或相对误差 $l < 10^{-4}$ ,结束。

(6) 代回(4)式: $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{z}$ 。

(7) 输出 $\mathbf{x}$ 。

## 2.4 局部超线性收敛性

在本小节中将阐述结合 GMRES 的半光滑牛顿法的优越性——局部超线性收敛性。这里,局部意味着只有当选择的初始点 $\mathbf{y}^{(0)} = (\mathbf{z}^{(0)}, \alpha^{(0)})$ 充分接近真实解 $\mathbf{y}^* = (\mathbf{z}^*, \alpha^*)$ 时,结论才成立,其中变量 $\mathbf{z}$ 是变量 $\mathbf{x}$ 的对偶变量。

由于方程组(14)式的第 1 式是光滑函数,所以现在只考虑(14)式的第 2 式:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}) &= F(\mathbf{z}, \alpha) = \sqrt{\alpha^2 + (1 - z^2)^2} - \\ &\quad \alpha - (1 - z^2) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $F$ 为 Lipschitz 连续且半光滑函数。求解(13)式的广义牛顿法迭代公式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{V}_k^{-1} F(\mathbf{y}^{(k)}), \\ (\mathbf{V}_k &\in \partial_B F(\mathbf{y}^{(k)})) \end{aligned} \quad (21)$$

设 $\mathbf{y}^*$ 为(20)式的解,若任意的 $\mathbf{V} \in \partial F(\mathbf{y}^*)$ 为非奇异的,参考文献[19]中证明了由(21)式给出的迭代公式是适定的,并具有超线性收敛性质,即:

$$\|\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^*\| = o(\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*\|) \quad (22)$$

通过第 2 节中的讨论知道,结合 GMRES 的半光滑牛顿法在求解非奇异非对称线性方程组问题时,有着收敛速度快、占用存储空间小的优点,且算法是局部超线性收敛的。但该算法只适用于高斯白噪声的去噪问题,其它噪声类型的情况需要另做推广。

## 3 数值结果及分析

本文中讨论运用结合 GMRES 的半光滑牛顿法对含有随机高斯白噪声图像去噪,并与结合 PCG 的半光滑牛顿法、ADMM<sup>[20-22]</sup>方法进行比较。虽然 ADMM 算法出现比较早,但是在最近几年才应用到图像处理中且效果比较好。作者做了大量对比实验,程序编写在 MATLAB R2007b 中进行。采用定量指标:峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)和均方误差(mean squared error, MSE)对图像质量进行评价。其定义分别如下:

$$\begin{cases} R_{\text{PSNR}} = 10 \lg \frac{255^2}{\sum_i \sum_j \frac{(\mathbf{J}_{ij} - \mathbf{I}_{ij})^2}{MN}} \\ R_{\text{MSE}} = \frac{1}{MN} \sum_i \sum_j (\mathbf{J}_{ij} - \mathbf{I}_{ij})^2 \end{cases} \quad (23)$$

式中, $M$ 和 $N$ 为图像尺寸大小, $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{J}$ 分别是原始无噪图像和恢复后的图像, $\mathbf{I}_{ij}$ 和 $\mathbf{J}_{ij}$ 表示图像像素。 $R_{\text{PSNR}}$ 值越大或 $R_{\text{MSE}}$ 值越小,恢复效果越好。在理论和实践的指导下,一般使用原始图像 $\mathbf{x}$ 的连续迭代值之间的差 $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2^2$ 来度量算法的收敛性。另外引入相对误差 $l$ 作为算法的停止条件。其定义如下:

$$l = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2^2}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2} \quad (24)$$

设定当 $l \leq 10^{-4}$ 或者迭代次数达到最大迭代次数 $c$ 时停止迭代。

### 3.1 1 维信号去噪问题

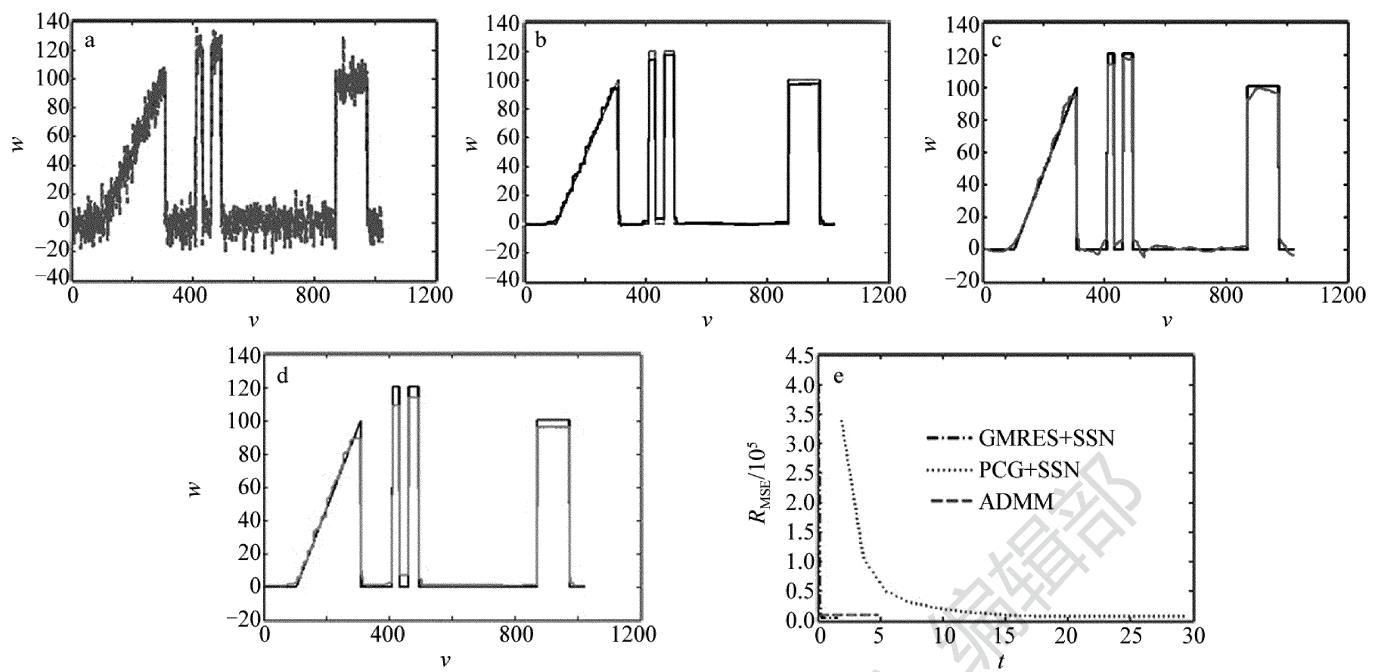
先给出差分矩阵 $\mathbf{A}$ 和信号 $\mathbf{x}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times n} \\ \mathbf{x}_i = \begin{cases} 5x_i - 0.5, (0.1 < x_i \leq 0.3) \\ 1.20, (0.4 < x_i \leq 0.42) \\ 1.20, (0.45 < x_i \leq 0.48) \\ 1.0, (0.85 < x_i \leq 0.95) \\ 0, (\text{otherwise}) \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , $i = 1, 2, \dots, n$ 。去噪模型为(1)式,这里噪声数据是服从 $n(0, 1)$ 正态分布的随机高斯白噪声。选择不同的正则化参量 $\lambda$ ,在解非对称线性方程组时比较分别结合 GMRES, PCG 的半光滑牛顿法和 ADMM 这 3 种算法,观察定量指标 $R_{\text{MSE}}$ 的变化情况。

图 1a 中给出了高斯噪声的方差 $\delta = 8$ 的信号图形的真实数据与噪声数据。图 1b、图 1c 和图 1d 表示在高斯噪声的方差 $\delta = 8$ 、正则化参量 $\lambda = 50$ 的情况下,分别结合 GMRES, PCG 的半光滑牛顿法和 ADMM 这 3 种算法的对比去噪图形。图 1e 表示均方误差 $R_{\text{MSE}}$ 随迭代时间 $t$ 的变化曲线。图 1a、图 1b、图 1c 和图 1d 的横坐标 $v$ 均表示离散点的坐标,无单位。图 1a 纵坐标 $w$ 表示观察到的离散点所对应的值,图 1b、图 1c 和图 1d 的纵坐标 $w$ 分别表示用不同方法恢复离散点所对应的值,均无单位。表 1 中给出当正则化参量 $\lambda = 50$ 时,随着参量 $\beta$ 的变化,3 种算法的迭代次数 $k$ 、迭代时间 $t$ 和均方误差 $R_{\text{MSE}}$ 的变化数据。

表 1 中, $k_1, k_2$ 和 $k_3$ 分别表示结合 GMRES, PCG 的 SSN 和 ADMM 算法恢复信号的迭代次数; $t_1, t_2$ 和 $t_3$ 分别表示结合 GMRES, PCG 的 SSN 和 ADMM 算法恢复信号的迭代时间; $m_1, m_2$ 和 $m_3$ 分别表示结合 GMRES, PCG 的 SSN 和 ADMM 算法恢复信号的 $R_{\text{MSE}}$ 。

Fig. 1 Experiment results of 1-D signal ( $\delta = 8, \lambda = 50$ )

a—real data and noise data b—SSN incorporated by GMRES c—SSN incorporated by PCG d—alternating direction method of multipliers e— $R_{\text{MSE}}$  variation curve vs. iteration time  $t$

Table 1 Experiment parameters when  $\lambda = 50$ 

$\beta$	$k_1$	$t_1$	$M_1$	$k_2$	$t_2$	$M_2$	$k_3$	$t_3$	$M_3$
2.2	29	2.1485	$0.0662 \times 10^5$	15	19.9191	$0.0992 \times 10^5$	1000	5.2583	$0.1394 \times 10^5$
2.3	49	2.3740	$0.0501 \times 10^5$	17	21.2814	$0.0702 \times 10^5$	1000	5.4383	$0.1225 \times 10^5$
2.4	86	3.1606	$0.0484 \times 10^5$	20	25.9716	$0.0581 \times 10^5$	1000	4.3907	$0.1349 \times 10^5$
2.5	70	4.1595	$0.0347 \times 10^5$	15	17.9194	$0.0495 \times 10^5$	1000	4.1653	$0.1121 \times 10^5$
2.6	44	1.5466	$0.0450 \times 10^5$	15	16.9880	$0.0579 \times 10^5$	1000	4.0729	$0.1467 \times 10^5$
2.7	54	3.3145	$0.0470 \times 10^5$	15	18.7179	$0.0663 \times 10^5$	1000	4.0212	$0.1565 \times 10^5$
2.8	45	3.0259	$0.0437 \times 10^5$	17	19.6219	$0.0774 \times 10^5$	1000	4.2353	$0.1620 \times 10^5$
2.9	62	2.2909	$0.0472 \times 10^5$	16	19.7418	$0.0861 \times 10^5$	1000	4.1886	$0.1748 \times 10^5$
3.0	45	3.0073	$0.0509 \times 10^5$	24	28.2398	$0.0743 \times 10^5$	1000	4.9195	$0.1854 \times 10^5$
3.1	56	2.1859	$0.0591 \times 10^5$	22	28.3739	$0.0820 \times 10^5$	1000	5.0466	$0.1949 \times 10^5$
3.2	80	2.7877	$0.0421 \times 10^5$	18	22.8552	$0.0565 \times 10^5$	1000	3.9656	$0.1915 \times 10^5$
3.3	44	3.2971	$0.0514 \times 10^5$	15	17.4596	$0.0793 \times 10^5$	1000	4.0851	$0.1971 \times 10^5$
3.4	84	5.0000	$0.0511 \times 10^5$	15	19.5113	$0.0866 \times 10^5$	1000	5.6617	$0.2348 \times 10^5$
3.5	73	2.7443	$0.0432 \times 10^5$	18	23.2715	$0.0594 \times 10^5$	1000	4.4383	$0.2249 \times 10^5$

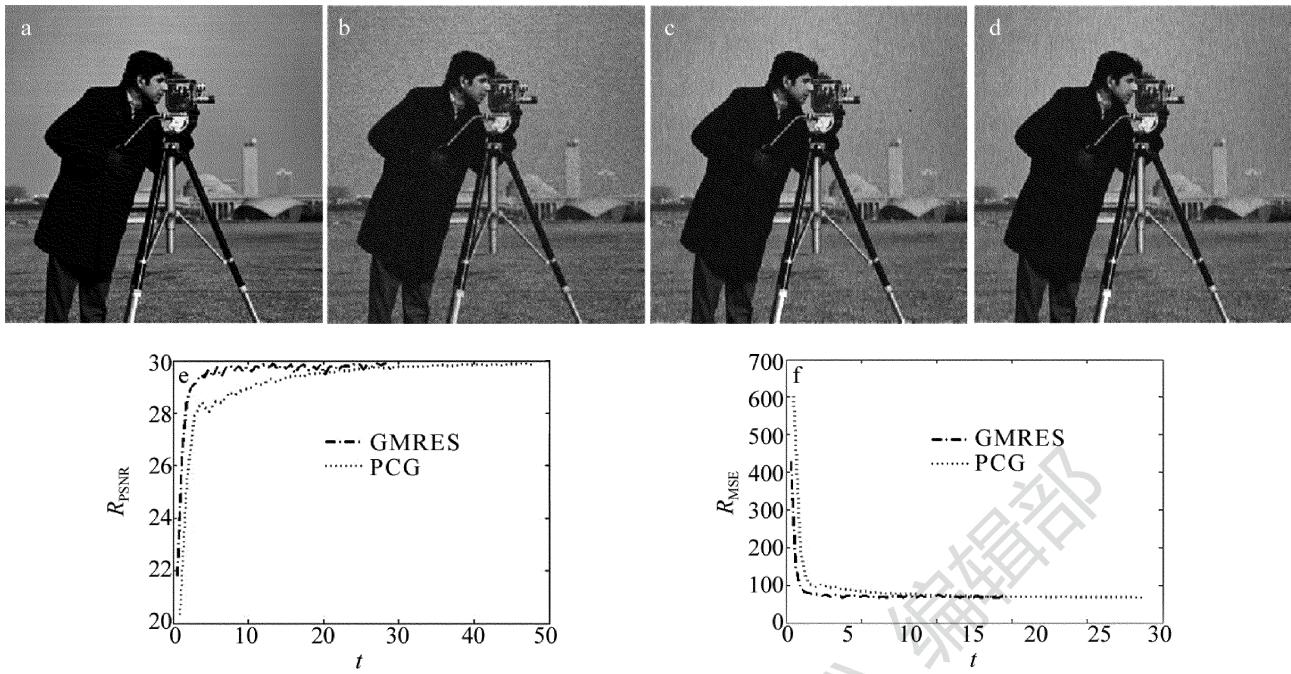
由表1看出:ADMM算法运行1000次没有达到收敛标准,随着参量 $\beta$ 不同,运行时间可能不同。虽然结合GMRES的SSN迭代次数不是最少,但迭代时间比结合PCG的SSN和ADMM的少很多,而且它的 $R_{\text{MSE}}$ 比结合PCG的SSN和ADMM的 $R_{\text{MSE}}$ 小很多,效果很好。综合图1和表1发现,结合GMRES的SSN和结合PCG的SSN都具有局部超线性收敛性,ADMM只有线性收敛性。

### 3.2 2维图像去噪问题

选取图像处理中常用的Cameraman图像作为测试目标,并对其加入标准方差 $\delta = 12$ 的高斯白噪声。Cam-

erman图像中不但含有像素跳跃区域(相机支架)、图像渐变区域(天空),而且还含有图像震荡区域(草坪)。实验中取正则参量 $\lambda = 8$ ,图2中给出了结合GMRES的半光滑牛顿法和结合PCG的半光滑牛顿法去噪结果。其中图2a为原始图像;图2b是含噪图像;图2c是结合GMRES的半光滑牛顿法的去噪结果;图2d是结合PCG的半光滑牛顿法的去噪结果;图2e和图2f分别是定量指标 $R_{\text{PSNR}}$ 和 $R_{\text{MSE}}$ 随时间 $t$ 的变化曲线图。

从图2可以看出,无论从 $R_{\text{PSNR}}$ , $R_{\text{MSE}}$ 还是时间 $t$ 方面作比较,结合GMRES的半光滑牛顿法均优于结合PCG的半光滑牛顿法。

Fig. 2 Experimental results of 2-D image ( $\delta = 12, \lambda = 8$ )

a—original image b—noise image c—recover image of SSN incorporated by GMRES d—recover image of SSN incorporated by PCG e— $R_{PSNR}$  variation curve vs. iteration time  $t$  f— $R_{MSE}$  variation curve vs. iteration time  $t$

## 4 结 论

利用半光滑牛顿法处理全变差噪声消除问题。结合 GMRES 的半光滑牛顿法具有局部超线性收敛性的优越性,不仅能够有效的提高恢复信号和图像的质量,而且与结合 PCG 的半光滑牛顿法、ADMM 相比时,收敛速度快且稳定。

## 参 考 文 献

- [1] MICHAEL K, QI L Q, YANG Y F, et al. On semi-smooth Newton methods for total variation minimization [J]. Manufactured in the Netherlands, 2007, 27(3):265-276.
- [2] PANG Zh F, LÜ J Ch. The modified semi-smooth Newton algorithm based on the ROF mode [J]. Pure Mathematics, 2011, 1(4):26-29 (in Chinese).
- [3] YANG M. Semi-smooth Newton method for solving nonlinear complementarity problems [D]. Xi'an: Xi'an Electronic and Science University, 2009:9-20 (in Chinese).
- [4] CHEN X J, NASHED Z H, QI L Q. Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations [J]. SIAM Journal Numerical Analysis, 2000, 38(4):1200-1216.
- [5] CHEN M Y. Application of semi-smooth Newton method for solving elastic wave parameters inversion in porous media [D]. Dalian: Dalian Maritime University, 2013:1-23 (in Chinese).
- [6] GRIESSE R, LOREN D A. A semismooth Newton method for Tikhonov functionals with sparsity constraints [J]. Inverse Problem, 2008, 24(3):1-22.
- [7] SAAD Y, SCHULTZ M. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, 1986, 7(3):856-869.
- [8] GUAN P Y, LI C G, JING H F. A weighted GMRES method based on polynomial preconditioning generalized minimal residual method [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2014, 31(5):697-706 (in Chinese).
- [9] MEI D. GMRES algorithm based on solution space decomposition and its application in image processing [J]. Computer and Digital Engineering, 2009, 37(12):139-143 (in Chinese).
- [10] WANG Q, DAI H. Regularization GMERR method for solving discrete ill-posed problems [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2013, 35(2):195-204 (in Chinese).
- [11] WANG M J, PAN Z Y. A regularization method for solving nonlinear ill-posed problems [J]. Journal of Xi'an Polytechnic University, 2013, 27(5):675-679 (in Chinese).
- [12] FUHRY M. A new tikhonov regularization method [J]. Numerical Algorithms, 2012, 59(3):433-445.
- [13] CHAMBOLLE A, POCK T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 40(1):120-145.
- [14] WANG S N, XU J, HUANG X L. Convex optimization [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013:85-90 (in Chinese).
- [15] CAI X J, HAN D, XU L L. An improved first-order primal-dual algorithm with a new correction step [J]. Springer Science + Business Media, 2013, 57(4):1419-1428.
- [16] STEPHEN B, LIEVEN V. Convex optimization [M]. Cambridge, UK: World Book Publishing Company, 2004:90-92.
- [17] ZHANG T B, XIE J, ZHU J J. The solution of the problem of the solution of the conjugate gradient method and its application in GPS [J]. Surveying and Mapping Engineering, 2010, 19(4):60-63 (in Chinese).
- [18] SUN Y J, SUN Q. Large complex linear equations with two conjugate gradient method [J]. Computer Engineering and Application, 2007, 43(36):19-20 (in Chinese).
- [19] LI W R. Semismooth newton algorithm for NCP with a non-monotone line search [D]. Tianjin: Tianjin University, 2008:16-20 (in Chinese).
- [20] DANIELE G, LANURE BF, GILLES A. ADMM algorithm for dem

- osaicking deblurring denoising [ J/OL ]. ( 2013-10-18 ) [ 2016-01-13 ]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00874610/file/admcolor-paper-5.pdf>.
- [21] JOAO F C M, JOAO M F X, PEDRO M Q A. ADMM for consensus on colored networks [ J ]. Decision and Control, 2012, 8267 ( 1 ): 5116-5121.
- [22] YASAR K A, ORHAN A. ADMM based mainlobe power constrained phase-only sidelobe suppression [ C ]// 2014 IEEE 22nd Signal Processing and Communications Applications Conference ( SIU ). New York, USA:IEEE, 2014:610-614.