

文章编号: 1001-3806(2014)05-0627-05

## 数字梯度敏感法在静态断裂力学实验中的应用

俞 海<sup>1</sup>, 郭荣鑫<sup>1\*</sup>, 夏海廷<sup>1</sup>, 颜 峰<sup>1</sup>, 张玉波<sup>1</sup>, 何天淳<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学 工程力学系 云南省先进材料力学行为与微观结构设计高校重点实验室, 昆明 650500; 2. 云南大学, 昆明 650500)

**摘要:** 为了研究断裂力学问题中裂纹尖端区域的局部变形场和断裂特性, 采用数字梯度敏感法对带有中心贯穿裂纹的有机玻璃有限宽板条进行了静态实验研究。实验过程中通过 CCD 记录裂纹尖端区域不同应力状态下的散斑图, 对记录的散斑图进行相关运算, 得到了不同应力状态下裂纹尖端周围区域内的光线偏转角, 并通过偏转角对 I 型裂纹的应力强度因子进行了提取。结果表明, 通过数字梯度敏感方法计算得到的应力强度因子与理论值吻合相对较好。

**关键词:** 图像处理; 断裂力学; 数字梯度敏感; 数字图像相关; 偏转角; 应力强度因子

**中图分类号:** O348.1 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.05.011

## Digital gradient sensing measurement applied in static fracture mechanics experiments

YU Hai<sup>1</sup>, GUO Rongxin<sup>1</sup>, XIA Haiting<sup>1</sup>, YAN Feng<sup>1</sup>, ZHANG Yubo<sup>1</sup>, HE Tianchun<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Yunnan Higher Education Institutes for Mechanical Behavior and Microstructure Design of Advanced Materials, Department of Engineering Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 2. Yunnan University, Kunming 650500, China)

**Abstract:** In order to study the local deformation field of crack tip and fracture characteristics in fracture mechanics, static fracture tests of the limited-width polymethyl methacrylate specimen with center-crack were carried out with digital gradient sensing method. Speckle patterns under different states of stress near the crack tip were recorded by CCD in the experiment. Angular deflection was obtained by digital image correlation method and stress intensity factor in mode I crack was extracted by angular deflection. It shows that the stress intensity factor calculated by digital gradient sensing measurement method is consistent with theoretical results.

**Key words:** image processing; fracture mechanics; digital gradient sensing; digital image correlation; angular deflection; stress intensity factor

## 引 言

数字梯度敏感<sup>[1-2]</sup> (digital gradient sensing, DGS) 法是基于数字图像相关 (digital image correlation method, DIC) 法<sup>[3-6]</sup> 的一种非接触、全场光学测量技术, 其原理是根据应力导致光线的偏转使透明

材料表现出的弹光效应来建立面内应力梯度与光线微小偏转量之间的关系, 偏转角可以利用数字图像相关方法来获取。因为此方法对面内应力梯度敏感, 因此, 利用它可以对平面应力状态下的断裂等应力集中问题进行研究。在对断裂问题的研究中, 全场测量方法还包括: 光弹性法、云纹干涉法、焦散线以及相干敏感梯度法。这些方法由于对所采用的光源要求较高以及对材料的有所限制, 而且需要对试样表面进行大量处理等复杂的工序, 因此其适用范围受到很大限制。而数字梯度敏感基于数字图像相关方法, 因此它对环境要求低、光路简单, 而且具有可以实时、全场测量的特点故受到相关学者的重视。PERIASAMY 用此方法研究了静态和动态荷载下局

基金项目: 云南省应用基础研究基金面上资助项目 (2011FB029); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20105314110006)

作者简介: 俞 海 (1986-), 男, 硕士研究生, 主要从事光测实验力学的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: guorx@kmust.edu.cn

收稿日期: 2013-09-23; 收到修改稿日期: 2013-10-29

部应力集中区域应力梯度的分布<sup>[7]</sup>。本文中基于此方法对有机玻璃(polymethyl methacrylate, PMMA)有限宽板条的中心贯穿裂纹进行了静态实验研究,得到了裂纹尖端周围区域应力梯度场的分布图,并对应力强度因子 $K_I$ 进行了测量,获得了与理论值吻合相对较好的结果。

## 1 基本原理

### 1.1 DGS 方法原理

如图 1 所示,用  $(x, y), (x_0, y_0)$  分别表示试件和目标板面内笛卡尔坐标系, CCD 光轴与  $z$  轴一致,  $L$  是 CCD 与试件中的距离。在参考状态下(试件不受荷载), 试件的厚度和折射率分别为  $B$  和  $n$ , 目标板面上  $P$  点的信息通过试件上  $O$  点被 CCD 所记录。在变形状态下(试件受荷载), 由于应力改变导致试件折射率的改变和泊松效应导致试件厚度的改变, 使  $P$  点附近  $Q$  点的信息通过试件上  $O$  点被 CCD 所记录。在此过程中, 光路由参考状态下的  $OP$  变为变形状态下的  $OQ$ , 因此, 通过确定  $PQ$  和  $\Delta$  (试件中平面与散斑板的距离) 便可计算得到  $OQ$  相对于光轴的偏转角  $\phi_x$  和  $\phi_y$ 。

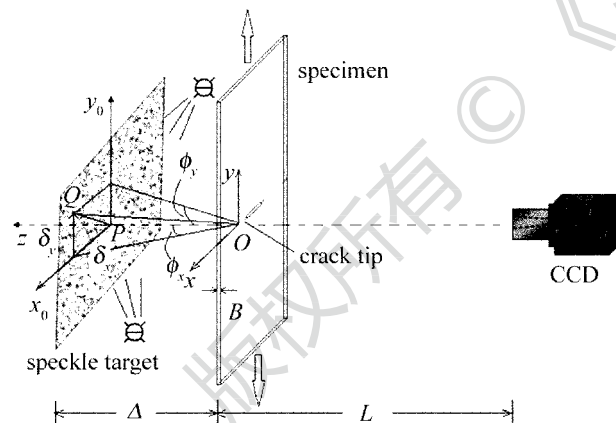


Fig. 1 Experimental schematics of the digital gradient sensing (DGS) method

以  $O$  为原点,  $\vec{i}, \vec{j}$  和  $\vec{k}$  分别为笛卡尔坐标系下的单位方向向量, 试件未变形时,  $\vec{k}$  与光轴重合, 此时 CCD 通过试件  $O(x, y)$  点记录散斑板面上  $P(x_0, y_0)$  点信息。试件发生变形时, 由于光路的改变, 散斑板面上  $Q(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y)$  点通过  $O(x, y)$  点被 CCD 记录, 其中  $\delta_x$  和  $\delta_y$  分别为  $PQ$  在  $x, y$  方向上的分量。光路  $OQ$  的单位向量用下式表示:

$$\vec{d} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} \quad (1)$$

式中,  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  是  $\vec{d}$  的方向余弦。由应力改变导致

的试件折射率变化和泊松效应导致的试件厚度变化产生的光程差表示如下<sup>[8]</sup>：

$$\delta S(x, y) = 2B(n-1) \int_0^{1/2} \varepsilon_{\bar{z}} d\left(\frac{z}{B}\right) + \int_0^{1/2} \delta n d\left(\frac{z}{B}\right) \quad (2)$$

式中,  $n$  是试件未变形时的折射率,  $B$  是试件的厚度。方程中的第 1 项代表厚度变化引起的光程差, 第 2 项代表折射率变化引起的光程差。根据 Maxwell-Neumann 定律和线弹性力学理论, 对于光学各向同性且无双折射性质的材料, 折射率变化与主应力之间的关系为<sup>[9]</sup>:

$$\delta n(x, y) = D_1(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3)$$

式中,  $D_1$  是应力光学常数,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  和  $\sigma_{zz}$  是  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的正应力。由各向同性材料广义胡克定理和线弹性理论  $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$ 。那么(2)式写为:

$$\delta S = 2B \left[ D_1 - \frac{\nu}{E} (n-1) \right] \times \\ + \sigma_{yy} \left[ 1 + D_2 \left( \frac{\sigma_{zz}}{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})} \right) \right] \Big] d\left(\frac{z}{B}\right) \quad (4)$$

式中,  $D_2 = [\nu D_1 + \nu(n-1)/E] / [D_1 - \nu(n-1)/E]$ ,  $E$  和  $\nu$  为试件的弹性模量和泊松比。在平面应力状态下, (4) 式简化为:

$$\delta S(x, y) \approx C_{\sigma} B(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5)$$

式中,  $C_\sigma = D_1 - (\nu/E)(n-1)$  是材料的光学常数。由于弹光效应使光程发生改变导致光线相对于光轴的偏转角, 由光程函数得到的光传播矢量为<sup>[8]</sup>:

$$\vec{d} = \frac{\partial(\delta S)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\delta S)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \quad (6)$$

从(1)式、(5)式、(6)式得知,对于小偏转角,方向余弦与面内应力梯度存在如下关系:

$$\alpha = \frac{\partial(\delta S)}{\partial x} = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\partial(\delta S)}{\partial \gamma} = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial \gamma} \quad (8)$$

经简单几何推导可以得到小偏转角下方向余弦  $\alpha, \beta$  与偏转分量  $\phi_x, \phi_y$  之间的关系:

$$\phi_x \approx \frac{\delta_x}{\Lambda} \approx \alpha = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x} \quad (9)$$

$$\phi_y \approx \frac{\delta_y}{\Delta} \approx \beta = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial \gamma} \quad (10)$$

(9)式和(10)式便是数字敏感梯度法的控制方程,已知 $C_\sigma$ 和 $B$ 就可以得到面内应力梯度,而 $\delta_x, \delta_y$ 可利用2维数字图像相关方法获取。

## 1.2 数字图像相关方法原理

数字图像相关方法是对运动、变形前后所采集得到的物体表面的两幅数字图像(散斑图像)进行相关匹配,以测量物体的位移、应变及场的分布,当物体表面变形时,物体表面的散斑随物体的变形而运动,物体表面随机分布的散斑点即为位移及变形的载体。其基本原理如图2所示,在参考图像中取以某待求像素点 $P(x_0, y_0)$ 为中心的 $(2M+1)\text{pixel} \times (2M+1)\text{pixel}$ 大小的正方形区域作为参考图像子区,在目标图像中通过一定的搜索方法按预先定义的相关函数进行相关计算,寻找与参考图像子区互相关系数最大或最小(取决于所选择的相关函数)以 $P'(x'_0, y'_0)$ 为中心的目标图像子区,以确定 $P(x_0, y_0)$ 点在 $x$ 和 $y$ 方向上的位移分量 $u$ 和 $v$ 。更详细的内容可以参考相关文献<sup>[3-6]</sup>。

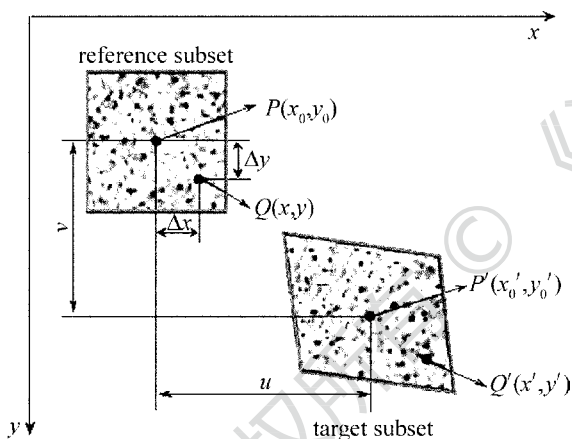


Fig. 2 Schematics of DIC method

## 2 实验研究

### 2.1 实验

基于上述理论,本文中对透明 PMMA 有限宽板条的中心贯穿裂纹进行了静态实验。试样的尺寸为 $400\text{mm} \times 100\text{mm} \times 3.8\text{mm}$ ,中心裂纹为如图3所示长度为 $31\text{mm}$ 的尖裂纹。实验前先对一表面平整的板面进行处理,使其表面具有随机分布的散斑点以作为本文中实验的目标板,并将其置于试件后方 $\Delta$ 处(本文中 $\Delta = 32\text{mm}$ ),且保证与试件表面平行。然后用 CCD 记录不同加载时刻目标板表面的散斑图像作为目标图像,采集图像时通过调整 CCD 焦距使图像最清晰为佳。实验中图像采集系统采用分辨率



Fig. 3 Photos of a PMMA specimen

为 $2448\text{pixel} \times 2048\text{pixel}$ 的 CCD,标定系数为 $1\text{mm} = 95\text{pixel}$ 。图4为 CCD 聚焦于试件表面和目标板表面裂尖附近区域的图像。从图4可以看出,由于受边界效应的影响,裂纹面附近区域的图像相对模糊,因此在用数字图像相关方法获取裂尖附近的 $\delta_x$ 和 $\delta_y$ 时不再考虑此区域。

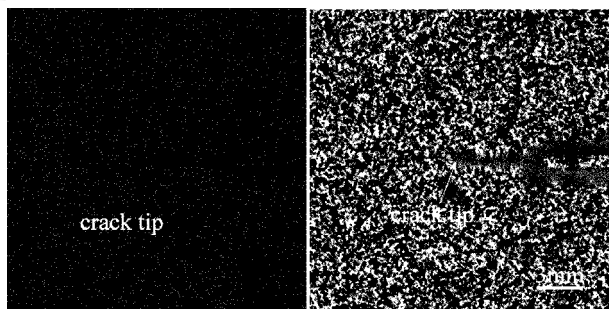


Fig. 4 Photos of crack-tip and its speckle pattern

在对变形前后所采集的数字图像进行相关运算时,采用作者编写的基于 MATLAB 的数字图像相关计算软件,由于依附于 MATLAB,因此可以很好地借助于 MATLAB 在数值计算和图像处理方面的优势而扩展其相关功能,操作简单、功能齐全。在相关计算中,由于加载过程中受应力集中的影响,试件裂尖附近区域对应的图像变形较大,为了尽量保证实际变形与算法所采用形函数的匹配<sup>[10]</sup>,采用 $31\text{pixel} \times 31\text{pixel}$ 相对较小的计算子区。

图5显示了通过计算得到的裂尖附近矩形区域内不同荷载下偏转角 $\phi_x$ 和 $\phi_y$ 的等高线,可以看出偏转角 $\phi_x$ 和 $\phi_y$ 分别呈轴对称分布,而且越靠近裂纹尖端等高线越密,说明越靠近裂尖,应力奇异性



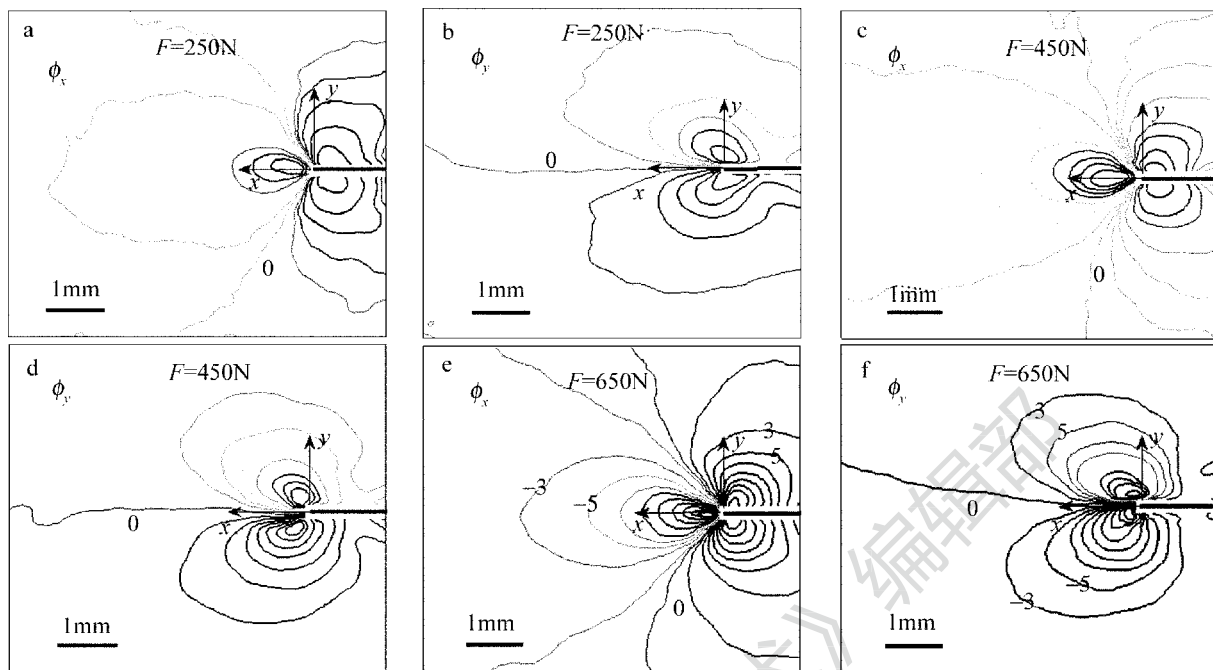


Fig. 5 Angular deflection  $\phi_x$  and  $\phi_y$  contours near crack tip at different load levels (contour interval is  $2 \times 10^{-4}$  radian)

越大, 应力集中程度越高。这与参考文献[9]中所采用方法得到的结果完全一致, 与参考文献[9]中所不同的是, 数字敏感梯度法只需一次相关计算便可同时得到对应荷载下的偏转角  $\phi_x$  和  $\phi_y$ 。

## 2.2 $K_I$ 的测定

根据 WILLIAMS 对 I 型裂纹应力场的描述, 面内应力梯度描述如下<sup>[8]</sup>:

$$\phi_x = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x} = C_\sigma B \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left( \frac{N}{2} - 1 \right) r^{\frac{N}{2}-2} \cos\left(\frac{N}{2} - 2\right)\theta \quad (11)$$

$$\phi_y = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial y} = C_\sigma B \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left( \frac{N}{2} - 1 \right) r^{\frac{N}{2}-2} \sin\left(\frac{N}{2} - 2\right)\theta \quad (12)$$

式中, 对于 PMMA,  $C_\sigma = -0.9 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ 。( $r, \theta$ ) 为定义在裂尖处的极坐标。  $A_1 = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $K_I$  为对应的 I 型裂纹应力强度因子。在  $K$  主导假设前提下, 上式中  $N \geq 2$  项相对于  $N=1$  项可以忽略。于是 (11) 式、(12) 式化简为:

$$\phi_x \approx C_\sigma B \left[ \left( -\frac{A_1}{2} \right) r^{-\frac{3}{2}} \cos\left(-\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (13)$$

$$\phi_y \approx C_\sigma B \left[ \left( -\frac{A_1}{2} \right) r^{-\frac{3}{2}} \sin\left(-\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (14)$$

从 (13) 式、(14) 式可以看出, 只要知道  $C_\sigma, B$

和偏转角  $\phi_x$  或  $\phi_y$  便可计算得到应力强度因子  $K_I$ 。本文中对  $0.3 \leq r/B \leq 1.2$  和  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  区域所包含点通过最小二乘提取应力强度因子, 这样可以有效减小因距裂尖过远或过近对计算结果产生的影响。根据 Irwin 应力强度因子理论, 应力强度因子用如下公式计算<sup>[11]</sup>:

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a} \quad (15)$$

式中,  $C$  为几何形状因子, 对于有限宽板条的中心贯穿裂纹 (如图 6 所示, 其中,  $2a$  是裂纹的长度,  $2b$  是有限宽板的宽度), 本文中采用 Isida 公式的最小二乘法拟合<sup>[11]</sup>:

$$C = 1 + 0.128(a/b) - 0.288(a/b)^2 + 1.525(a/b)^3 \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式可得:

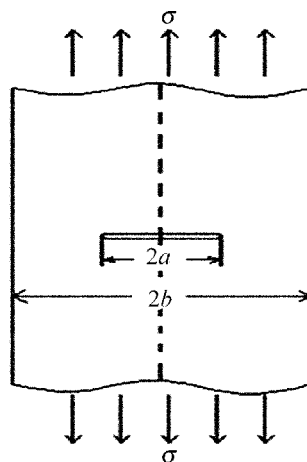


Fig. 6 Schematics of the limited width specimen with center-crack

$$K_I = \left[ 1 + 0.128 \left( \frac{a}{b} \right) - 0.288 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1.525 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right] \frac{F}{2bB} \sqrt{\pi a} \quad (17)$$

式中,  $F$  是加载力。

采用此公式可以对本文中描述问题的应力强度因子进行理论计算。图7显示,本文中通过实验计算得到的应力强度因子  $K_I$  与理论值吻合较好。

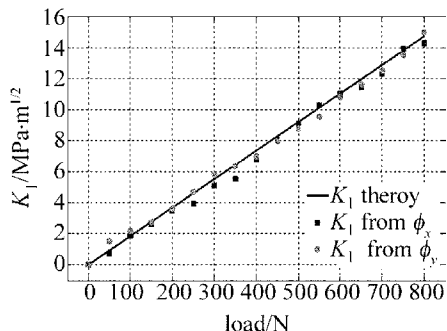


Fig. 7 Theory and experiment data of stress intensity factors under different load levels

### 3 结 论

介绍了数字梯度敏感测量技术的基本原理,并将其运用于 PMMA 材料 I 型裂纹尖端变形场和断裂特征的测量,通过数字图像相关方法对光线偏转角的计算提取了 I 型裂纹应力强度因子  $K_I$ 。结果表明:DGS 方法对断裂力学裂纹尖端区域的应力梯度敏感;通过 DGS 方法测得的  $K_I$  与理论结果吻合较好;由于 DGS 方法对环境要求低、光路简单,且与现已比较成熟的 DIC 方法相结合,在相关材料应力集中问题全场测量方面是一种行之有效的方法。

### 参 考 文 献

[1] PERIASAMY C, TIPPUR H V. A full-field reflection-mode digital

gradient sensing method for measuring orthogonal slopes and curvatures of thin structures [J]. Measurement Science and Technology, 2013, 24(2): 025202.

[2] PERIASAMY C, TIPPUR H V. Measurement of orthogonal stress gradients due to impact load on a transparent sheet using digital gradient sensing method [J]. Experimental Mechanics, 2013, 53(1): 97-111.

[3] BRUCK H A, MCNEIL S R, SUTTON M A, et al. Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction [J]. Experimental Mechanics, 1989, 29(3): 261-267.

[4] PETERS W H, RANSON W F. Digital imaging techniques in experimental stress analysis [J]. Optical Engineering, 1981, 21(3): 427-431.

[5] CHU T C, RANSON W F, SUTTON M A, et al. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics [J]. Experimental Mechanics, 1985, 25(3): 232-244.

[6] YU H, GUO R X, XIA H T, et al. Experimental study on the elastic modulus of WC/Cu composite material with different WC content [J]. Laser Technology, 2013, 37(2): 140-143 (in Chinese).

[7] PERIASAMY C, TIPPUR H V. A full-field digital gradient sensing method for evaluating stress gradients in transparent solids [J]. Applied Optics, 2012, 51(12): 2088-2097.

[8] TIPPUR H V, KRISHNASWAMY S, ROSAKIS A J. Optical mapping of crack tip deformations using the methods of transmission and reflection coherent gradient sensing-a study of crack tip K-dominance [J]. International Journal of Fracture, 1991, 52(2): 91-117.

[9] YAO X F, YU W, LIU D L, et al. Coherent gradient sensing interferometry technology and its application [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2006, 21(5): 560-564 (in Chinese).

[10] SCHREIER H W, SUTTON M A. Systematic errors in digital image correlation due to undermatched subset shape functions [J]. Experimental Mechanics, 2002, 42(3): 303-310.

[11] LI Q F, LI S F. Fracture mechanics and its application in engineering [M]. Harbin: Harbin Engineering University Press, 2008: 29-253 (in Chinese).