

文章编号: 1001-3806(2012)04-0557-05

## 色散管理孤子系统的调制不稳定性

卢 涣 王东升

(信息工程大学 理学院 郑州 450001)

**摘要:** 为了探究色散管理孤子系统抗微小扰动的能力,从色散管理孤子的调制不稳定性出发,利用孤子传输满足的非线性薛定谔方程,采用线性稳定性分析和数值模拟,得到色散管理系统中调制不稳定的增益谱;得出色散管理孤子各阶调制不稳定的增益曲线,并分析了基阶调制不稳定性的主导作用的条件,讨论了色散图中路径平均色散值。结果表明,色散深度对基阶调制不稳定性增益谱有影响,在平均色散为负值的情况下,平均色散值 $\beta_{av}$ ( $\beta_{av} < 0$ )越大,色散波动幅度越小,基阶调制不稳定的增益越小,更有利于抑制调制不稳定性增益;但将平均色散值降至更小时,调制不稳定性增益谱不再连续。

**关键词:** 非线性光学; 色散管理孤子; 调制不稳定性; 数值模拟

中图分类号: TN929.1; O437

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.04.031

## Modulation instability in dispersion managed soliton systems

LU Xun, WANG Dong-sheng

( Institute of Science, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China )

**Abstract:** In order to explore the ability for a dispersion managed soliton (DMS) system to resist smaller fluctuation, firstly, starting from the analysis of its modulation instability (MI), on the base of nonlinear soliton transfer equation, the expression for the gain spectrum of MI in DMS was deduced. Secondly, the gain curve of each order MI was presented, and then conditions of the fundamental MI playing a leading role were analyzed. Finally, the influence of average dispersion and dispersion depth on MI was discussed. The results show that in negative average dispersion region as the average dispersion becomes larger and dispersion fluctuates smaller, and influence of fundamental MI becomes smaller, so it is more favorable to suppress MI. However, MI gain spectrum appears side-lobe phenomenon, when the average dispersion becomes very small.

**Key words:** nonlinear optics; dispersion-managed soliton; modulation instability; numerical simulation

## 引言

调制不稳定性(modulation instability, MI)是一种由于非线性效应和色散之间的相互作用导致的对平面波的扰动,它表现为对微小扰动的指数型放大<sup>[1]</sup>。调制不稳定性广泛存在于许多物理领域,如流体力学、非线性光学和等离子物理,并得到了深入研究<sup>[2]</sup>。在光纤光学中,调制不稳定性出现需要反常色散的条件,具体表现为:随着距离增加,光纤中微小扰动呈现指数型增加<sup>[3]</sup>,但在某些特定情况下,MI可以发生在正常色散区<sup>[4]</sup>。该现象在理论上和实验上得到了广泛的重视,尤其是在高重复率超短脉冲串和超连续谱等领域<sup>[5]</sup>。有研究表明,调制不稳定性增益对边带的放大,破坏了原有的光波的稳定结构,产生了许多局域化

的结构,这些结构可能是孤子的初期结构<sup>[6]</sup>。

本文中利用线性稳定性分析的方法,推导出色散管理孤子(dispersion managed soliton, DMS)系统中调制不稳定的增益谱,讨论了平均色散和色散波动幅度对色散管理孤子系统的影响,得到了与参考文献[7]中相同的结论,并且进一步分析了较小平均色散时的情况,发现了MI增益谱出现了不连续现象;对比色散参数对各阶MI的影响,分析了零阶MI起主要作用的条件。

### 1 理论分析<sup>[8-9]</sup>

在色散管理系统中,光脉冲在光纤中传输满足非线性薛定谔方程:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} [\beta_{av} + \beta(z)] \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A = -i \frac{\alpha}{2} A \quad (1)$$

式中脉冲包络振幅 $A(z, t)$ ,传输距离 $z$ ,延迟时间 $t$ ,DMS系统的色散 $\beta_2(z) = \beta_{av} + \beta(z)$ , $\beta_{av}$ 为平均色散, $\beta(z)$ 为色散周期变化量,定义色散波动幅度为 $|\beta(z)|$ ,非线性系数 $\gamma$ ,损耗系数 $\alpha$ ,并设放大间距 $l_a$ 等于色散周期 $l_d$ 。

作者简介: 卢 涣(1966-),男,副教授,主要研究光信息处理、光通信技术、数字图像处理等。

E-mail: ludapost@tom.com

收稿日期: 2011-10-08; 收到修改稿日期: 2011-12-27

利用变形  $A(z, t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right)u(z, t)$  (1) 式变化为:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} [\beta_{av} + \beta(z)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ \gamma \exp(-\alpha z) |u|^2 u = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

假设  $u(z, t)$  在光纤中传输时与时间无关, 则(2)式很容易得到稳态解:

$$\bar{u}(z, t) = \sqrt{P_0} \exp[i\gamma P_0 \int_0^z \exp(-\alpha z') dz'] \quad (3)$$

式中  $P_0$  是输入端脉冲功率。

对(2)式进行稳定性分析, 设系统微扰为  $a(z, t)$ , 并令  $f(z) = \exp(-\alpha z)$ , 得到:

$$u(z, t) = [\sqrt{P_0} + a(z, t)] \exp[i\gamma P_0 \int_0^z f(z') dz'] \quad (4)$$

$$\text{令: } a(z, t) = \frac{1}{2} [a(z, \Omega) \exp(i\Omega t) + a(z, -\Omega) \exp(-i\Omega t)] \quad (5)$$

将(4)式、(5)式代入(2)式, 得:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a(z, \Omega)}{\partial z} = -\frac{1}{2} [\beta_{av} + \beta(z)] \times \\ \Omega^2 a(z, \Omega) - \gamma P_0 f(z) [a(z, \Omega) + a^*(z, -\Omega)] \end{aligned} \quad (6)$$

引入变换:

$$a(z, \Omega) = b(z, \Omega) \exp\left[\frac{i}{2}\Omega^2 \int_0^z \beta(z') dz'\right] \quad (7)$$

代入上式得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(z, \Omega)}{\partial z} = i \left[ \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 + \gamma P_0 f(z) \right] \times \\ b(z, \Omega) + i \gamma P_0 h(z) b^*(z, -\Omega) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v(z, \Omega) \\ v^*(z, -\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \left( \frac{1}{2} n k_a - \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 - \gamma P_0 a_0 \right) \\ -i \gamma P_0 c_n^* \end{bmatrix}$$

矩阵的特征值  $M$  满足:

$$\begin{aligned} M^2 = \gamma^2 P_0^2 c_n c_n^* - \left( \frac{1}{2} n k_a - \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 - \gamma P_0 a_0 \right)^2 = \\ \gamma^2 P_0^2 |c_n|^2 - \left( \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 + \gamma P_0 a_0 - \frac{1}{2} n k_a \right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

所以色散管理系统中  $n$  阶调制不稳定性的增益谱为:

$$g(\Omega) = 2 \operatorname{Re}(M) \quad (16)$$

$n$  阶 MI 出现最大增益为:

$$g_{\max} = 2 \gamma P_0 |c_n| \quad (17)$$

出现最大增益处的频率为:

$$\Omega' = \pm \sqrt{\frac{1}{|\beta_{av}|} [n k_a - 2 \operatorname{sgn}(\beta_{av}) \gamma P_0 |a_0|]} \quad (18)$$

## 2 数值模拟结果及分析

采用如图 1 所示的色散分布, 此时  $\beta_{av} < 0$ , 初始端

式中  $h(z) = f(z) \cdot \exp[-i\Omega^2 \int_0^z \beta(z') dz']$ , 通过这步变换, 周期内累积的  $\beta(z)$  被包含在  $h(z)$  中。

将  $f(z)$  和  $h(z)$  展开为傅里叶级数:

$$f(z) = \exp(-\alpha z) = \sum_n a_n \exp(ink_a z) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h(z) = f(z) \cdot \exp[-i\Omega^2 \int_0^z \beta(z') dz'] = \\ \sum_n c_n \exp(ink_d z) \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $a_n$  和  $c_n$  为傅里叶系数,  $k_a = \frac{2\pi}{l_a}$ ,  $k_d = \frac{2\pi}{l_d}$ , 由于  $l_a = l_d$ , 则  $k_d = k_a$ 。为了逼近微扰的  $n$  阶傅里叶分量, 引入如下变换:

$$b(z, \Omega) = v(z, \Omega) \exp\left(i \frac{n}{2} k_a z\right) \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式, 当扰动接近第  $n$  个 Fourier 谐波函数时, 即  $\beta_{av} \Omega^2 \approx nk_a$ , 此时只需考虑  $\exp\left(-i \frac{nk_a}{2} z\right)$  分量<sup>[7]</sup> 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(z, \Omega)}{\partial z} = -i \left( \frac{1}{2} nk_a - \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 - \gamma P_0 a_0 \right) \times \\ v(z, \Omega) + i \gamma P_0 c_n v^*(z, -\Omega) \end{aligned} \quad (12)$$

同理:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*(z, -\Omega)}{\partial z} = -i \gamma P_0 c_n^* v(z, \Omega) + \\ i \left( \frac{1}{2} nk_a - \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 - \gamma P_0 a_0^* \right) v^*(z, -\Omega) \end{aligned} \quad (13)$$

由上面两式可得系统矩阵为:

$$\begin{bmatrix} i \gamma P_0 c_n & v(z, \Omega) \\ i \left( \frac{1}{2} nk_a - \frac{1}{2} \beta_{av} \Omega^2 - \gamma P_0 a_0^* \right) & v^*(z, -\Omega) \end{bmatrix} \quad (14)$$

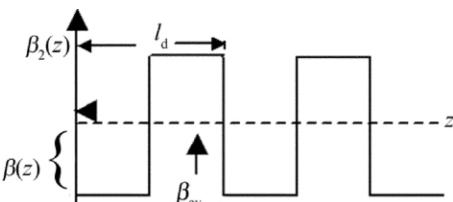


Fig. 1 Dispersion distribution map

$\beta(z) = \beta < 0$ 。放大间距  $l_a$  与色散周期  $l_d$  相等。

对于如图 1 所示的色散分布, 傅里叶系数  $a_n$  和  $c_n$  计算过程如下:

$$f(z) = \exp(-\alpha z) = \sum_n a_n \exp(ink_a z) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{l_a} \int_0^{l_a} \exp(-\alpha z) \exp(ink_a z) dz = \\ \frac{\exp[i(nk_a - \alpha)l_a] - 1}{(ink_a - \alpha)l_a} \end{aligned} \quad (20)$$

由于  $k_a = \frac{2\pi}{l_a}$  则:

$$a_n = \frac{\exp(i2\pi n) \cdot \exp(-\alpha l_a) - 1}{in2\pi - \alpha l_a} = \frac{1 - \exp(-\alpha l_a)}{\alpha l_a - i2\pi n} \quad (21)$$

$$h(z) = f(z) \cdot \exp[-i\Omega^2 \int_0^z \beta(z') dz'] = \sum_n c_n \exp(ink_d z) \quad (22)$$

令  $l_{f,h} = \frac{l_f}{2}$ ,  $k_{d,h} = \frac{2\pi}{l_{f,h}} = 2k_d$ ,  $\beta\Omega^2 = ck_d$  则有:

$$c_n = \frac{1}{2l_{f,h}} \int_0^{l_{f,h}} \exp(-\alpha z) \exp\left[-i\frac{(c+n)}{2} k_{f,h} z\right] dz + \frac{1}{2l_{f,h}} \exp(-\alpha l_{f,h}) \exp[-i(c+n)\pi] \times \int_0^{l_{f,h}} \exp(-\alpha z) \exp\left(i\frac{c-n}{2} k_{f,h} z\right) dz \quad (23)$$

## 2.1 最大增益频率处色散变化量 $\beta$ 和平均色散与增益的变化关系

参量取值如下:  $l_a = l_d = 50\text{km}$ , 非线性系数  $\gamma = 2.6\text{W}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$ , 初始脉冲功率  $P_0 = 2\text{mW}$ 。利用(17)式、(18)式、(21)式、(23)式, 得到了  $n=0, n=1, n=2, n=3$  时 MI 最大增益频率处增益随色散变化  $\beta$ , 平均色散变化的关系图, 如图2和图3所示。

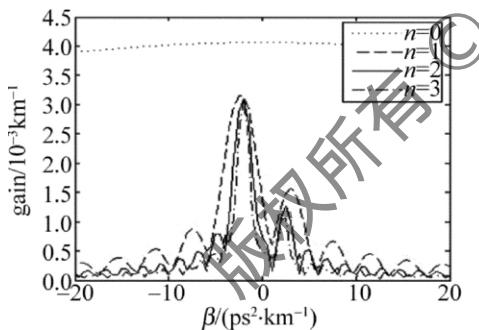


Fig. 2 MI gain with  $\beta$  in DMS system

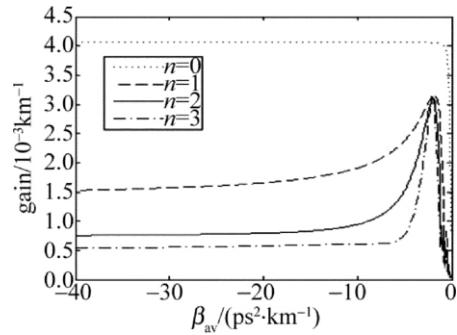


Fig. 3 MI gain varying with average dispersion  $\beta_{av}$  in DMS system

图2中的参量条件为  $\beta_{av} = -2\text{ps}^2/\text{km}$ , 从图中能够看出: 基阶(0阶)MI与其它各阶在中心频率处的最大增益随色散变化  $\beta$  的变化规律有明显的差别, 基阶在中心频率处的增益受色散变化  $\beta$  的影响较小, 而其

它各阶波动剧烈。进一步研究表明: 当  $\beta_{av}$  值不同时, 非零各阶出现峰值时的  $\beta$  值不同。如表1所示, 当  $\beta$

Table 1  $\beta$  value in gain peak value with different  $\beta_{av}$  value at central frequency

$\beta_{av}$ / ( $\text{ps}^2 \cdot \text{km}^{-1}$ )	gain peak value $\beta/( \text{ps}^2 \cdot \text{km}^{-1})$	gain/ $\text{km}^{-1}$
$n=1$	-1.09	0.0031715
	-2.17	0.0031716
	-3.26	0.0031716
	-4.34	0.0031716
$n=2$	-1.01	0.0031138
	-2.03	0.0031139
	-3.05	0.0031139
	-4.06	0.0031139
$n=3$	-1	0.0031003
	-2	0.0031003
	-3	0.0031003
	-4	0.0031003

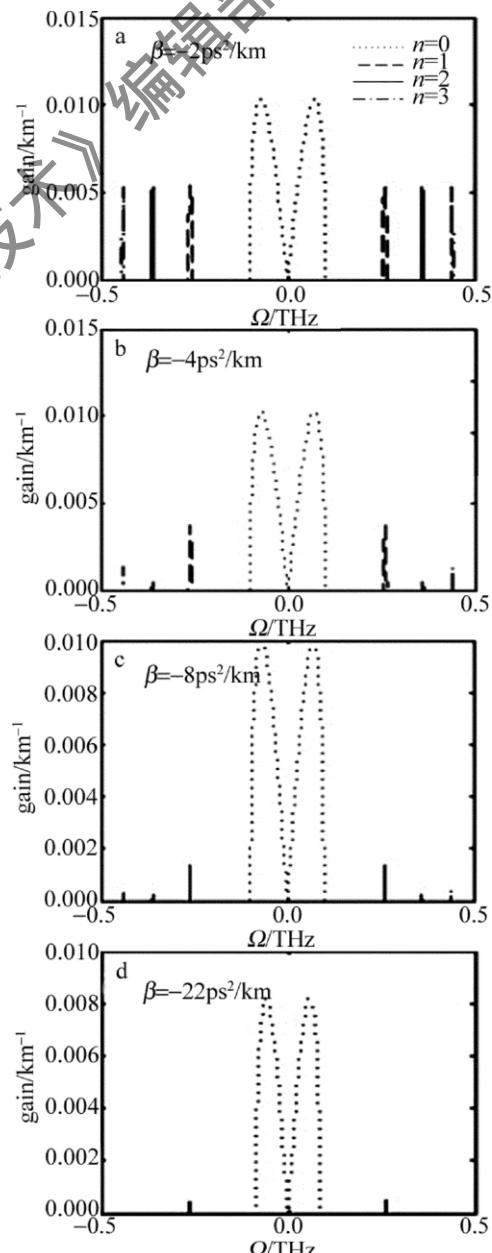


Fig. 4 Each order MI gain curve with  $\beta_{av} = -2\text{ps}^2/\text{km}$

与 $\beta_{av}$ 近似相等时,非零阶出现峰值,此时即色散图中色散值部分为0;因此,讨论色散管理孤子的MI时,当 $\beta$ 与 $\beta_{av}$ 相差不大时,不宜忽略非零阶的影响。

图3中,当 $\beta = -2\text{ps}^2/\text{km}$ ,对比 $\beta_{av} = -2\text{ps}^2/\text{km}$ 的左右两侧,发现当 $\beta_{av} > -2\text{ps}^2/\text{km}$ (即 $\beta_{av} > \beta$ )时,各阶MI增益下降的速度更快,所以为降低微扰对系统的影响,选择色散分布时,尽量要求 $\beta_{av} > \beta$ ,这与通常认为的选择局部大色散值且平均色散值较小的色散分布相吻合。

图4和图5分别是 $\beta$ 和 $\beta_{av}$ 不同值时,零阶和非零阶的MI增益曲线,从图中看出,当 $\beta_{av}$ 与 $\beta$ 相等时,非零阶峰值相等且最大,可以和零阶相比拟。但随着 $\beta$ 值的减小(见图4) $\beta_{av}$ 值的增大(见图5)非零各阶不

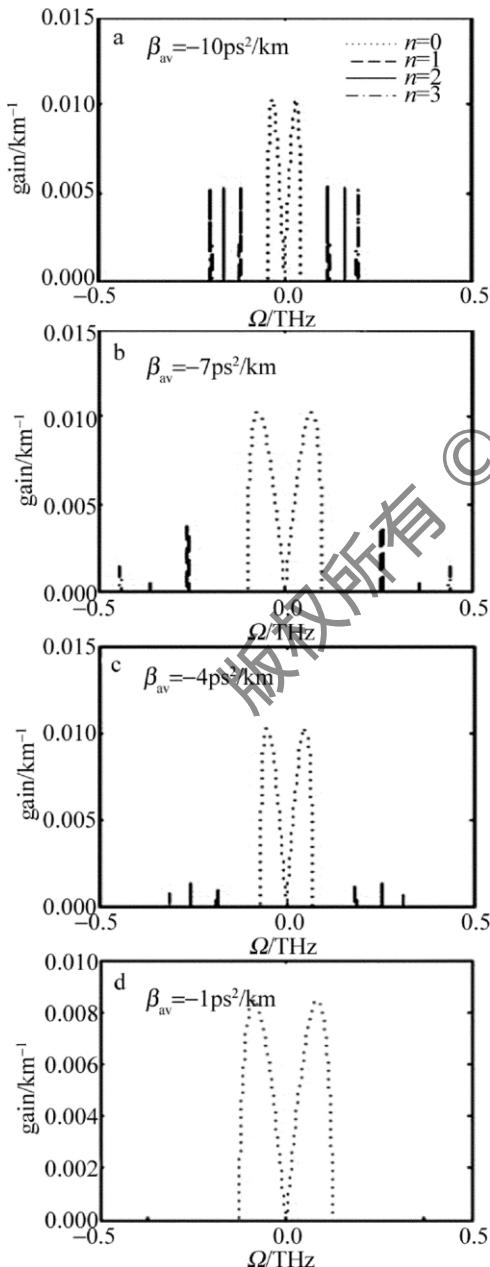


Fig. 5 Each order MI gain curve with  $\beta = -10\text{ps}^2/\text{km}$

同程度迅速减小,这与上面的结论相同,也说明上面的分析是正确的。

## 2.2 不同色散变化量 $\beta$ 和平均色散时基阶MI增益谱的变化

取值如下: $l_a = l_d = 50\text{km}$  非线性系数 $\gamma = 2.6\text{W}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$  初始脉冲功率 $P_0 = 2\text{mW}$ 。改变色散变化值 $\beta$ 和平均色散 $\beta_{av}$ ,利用(15)式、(16)式、(21)式和(23)式得到图6、图7和图8。

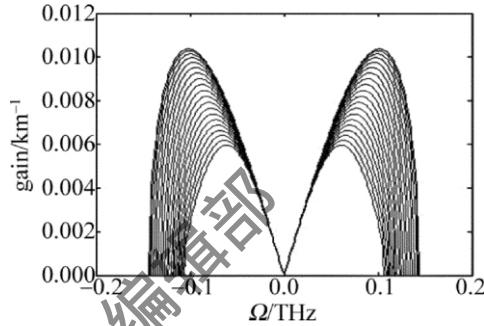


Fig. 6 Fundamental MI gain curve with different  $\beta$  value

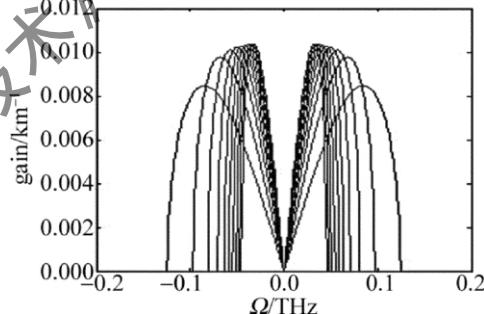


Fig. 7 Fundamental MI gain curve with different  $\beta_{av}$  value

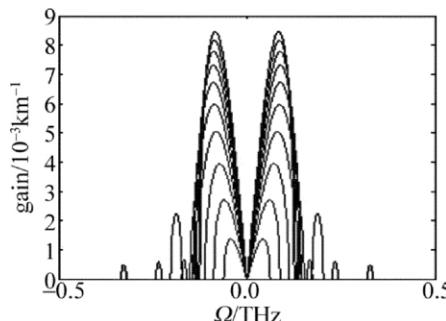


Fig. 8 When  $\beta_{av}$  value smaller, fundamental MI gain curve with different  $\beta_{av}$  value

图6中平均色散值不变取 $\beta_{av} = -1\text{ps}^2/\text{km}$ ,图中曲线从外到里依次是色散 $\beta$ 取 $-20\text{ps}^2/\text{km} \sim -1\text{ps}^2/\text{km}$ 时的基阶增益曲线。结果表明:随着色散变化值 $\beta$ ( $\beta < 0$ )的增大,即色散波动幅度 $|\beta|$ 越小,基阶增益逐渐降低,对调制不稳定性产生的增益抑制增强。

图7中色散变化 $\beta$ 取为 $-10\text{ps}^2/\text{km}$ ,图中曲线从中间向外依次是色散 $\beta_{av}$ 取 $-10\text{ps}^2/\text{km} \sim -1\text{ps}^2/\text{km}$ 时的基阶增益曲线。结果表明:随着平均色散 $\beta_{av}$ ( $\beta_{av} < 0$ )的增大,即平均色散更接近于0,基阶增益逐渐降低。

图8为色散变化 $\beta = -10\text{ps}^2/\text{km}$ ,平均色散 $\beta_{av} = -1\text{ps}^2/\text{km} \sim -0.1\text{ps}^2/\text{km}$ 时的曲线。从图中能够看出:当 $\beta_{av}$ 较小时,基阶增益频谱不再连续,中间有一段频率增益为0。

### 3 结 论

探讨了色散管理孤子的调制不稳定性,从色散管理光孤子在光纤中传输满足的非线性薛定谔方程出发,通过线性稳定性分析,推导出色散管理系统中调制不稳定性增益谱。

参考文献[7]和参考文献[9]中忽略了非零阶的影响,直接讨论了色散图参量变化对零阶MI的影响,并没考虑其它各阶对总MI的影响是否随着色散图参量的变化而变化,作者认为有必要首先关注各阶在总的MI的比重,于是通过讨论色散管理孤子各阶MI的增益曲线,分析出零阶MI起主要作用的条件。

参考文献[7]和参考文献[9]中讨论了平均色散和色散波动幅度对零阶MI的影响,作者对此也进行了讨论,得到了同样的结论,在平均色散为负值的情况下,平均色散值 $\beta_{av}$ ( $\beta_{av} < 0$ )越大,色散波动幅度越小,基阶MI的增益越小,更有利抑制MI增益;但将平均色散降至更小时,MI增益谱不再连续。关于MI增益谱不连续的非线性机理需要作进一步的研究。

### 参 考 文 献

- [1] ZHONG X Q , CHEN J G , LI D Y. Modulation instability in the decreasing dispersion fibers with quintic nonlinearity [J]. *Laser Technology* , 2006 , 30( 1 ) : 27-30 ( in Chinese ).
- [2] CENTURIN M , PORTER A , PU Y. Modulational instability in nonlinearity managed optical media [J]. *Physical Review* , 2007 , A75 ( 2 ) : 63-80.
- [3] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optical [M]. New York , USA: The Institute of Electrical and Electronics Engineering ,Elsevier Pte Ltd , 2002: 56-59.
- [4] ROTHENBERG J E. Modulational instability for normal dispersion [J]. *Physical Review* , 1990 , A42( 1 ) : 682-685.
- [5] TIOFACK C G L , MOHAMADOU A , KOFANE T C. Modulational instability in optical fiber with stochastic parameters and noninstantaneous response [J]. *Optics Communications* , 2010 , 283( 6 ) : 1096-1101.
- [6] KRÓLIKOWSKI W , BANG O , NIKOLOV N I , et al. Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media [J]. *Journal of Optics* 2004 , B97( 6 ) : S288-S294.
- [7] YANG H M , PAN W , LUO B , et al. Study on modulational instability in dispersion-managed soliton systems [J]. *Study on Optical Communications* , 2007 , 40( 6 ) : 23-26 ( in Chinese ).
- [8] SMITH N J , DORAN N J. Modulational instabilities in fibers with periodic dispersion management [J]. *Optics Letters* , 1996 , 21( 8 ) : 570-572.
- [9] KAEWPLUNG P , ANGKAEW T. Sideband instability in the presence of periodic power variation and periodic dispersion management [C]// *Optical Fiber Communication Conference and Exhibit* , 2001. Anaheim , USA: OFC 2001: WDD32.