

文章编号: 1001-3806(2012)05-0708-05

强度依赖 Jaynes-Cummings 模型中的量子态保真度

饶金同 王家骊 梁 军*

(安徽师范大学 物理与电子信息学院 芜湖 241000)

摘要: 为了研究相干光场作用下含原子运动的强度依赖 Jaynes-Cummings 模型中的量子态保真度,采用全量子理论和数值计算的方法,推导出系统、光场及原子的量子态保真度的解析表达式,以及在不同的初始条件下相应的数值模拟结果。结果表明,在相干光场作用下,原子初始时刻所处状态、运动速度以及场模结构对体系、光场及原子的量子态保真度存在一定影响,当原子初始处于基态和激发态同权重叠加态时,原子运动速度越快,量子态保真度越高;场模结构参量越大,量子态保真度越高。这一研究结果对量子态的制备和量子关联特性方面的认识具有一定的实际意义。

关键词: 物理光学; 强度依赖 Jaynes-Cummings 模型; 量子态保真度; 数值分析; 原子运动; 场模结构

中图分类号: O431 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.05.034

Fidelities of quantum states in intensity-dependent Jaynes-Cummings model

RAO Jin-tong, WANG Jia-si, LIANG Jun

(College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: Based on the quantum theory and numerical calculation, the fidelities of quantum states were investigated in intensity-dependent Jaynes-Cummings model containing atomic motion under the interaction of coherent field. The analytical expressions of the fidelities of quantum states were derived and simulation results were obtained. In addition, the influence of atomic motion and the field mode structure on the fidelities of quantum states of the system in different atomic initial states was discussed. The results indicate that both the atomic motion and the field mode structure can modulate the fidelities of quantum states in the system of interaction. The greater the velocities of atomic motion, the higher the fidelities of the three systems are. On the other hand, the larger the field mode structures, the higher fidelity of the three systems. The results are meaningful for the development of quantum communication and quantum calculation.

Key words: physical optics; intensity-dependent Jaynes-Cummings model; fidelity of quantum state; numerical calculation; atomic motion; field mode structure

引言

光场与原子的相互作用是量子光学研究的重要课题之一。人们在进行光场和原子相互作用的研究中发现了一些重要的非经典性质,如原子的反转崩塌和复原^[1]、光场的压缩^[2]、量子纠缠^[3]等现象。这最终导致量子通信^[4-5]、量子计算^[6]、量子密码术^[7-8]等量子信息科学的研究和发展。

量子态是量子信息的载体,量子信息的态在演化过程中实现信息的处理和传递,而传递过程中就不可避免地受到外界各种因素的干扰,使量子态发生一定的变化。人们为了描述量子态在演化和传递

过程中偏离原来状态的程度就引入了保真度的概念^[9]。近年来一些作者对光场与原子作用的量子信息的保真度问题做了研究,如纠缠态原子与压缩真空场 Raman 相互作用的量子信息保真度^[10]、简并喇曼过程中量子保真度的演化^[11]、原子运动对量子信息保真度的影响等^[12]。但是还没有人对强度依赖 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中量子信息保真度的演化有过讨论。为了更加贴近实际情况,本文中运用全量子理论和数值计算的方法讨论了强度依赖 J-C 模型中含原子运动的量子信息保真度,并对原子初始相位、原子运动速度和场模结构参量对量子态保真度的影响做了讨论。

1 理论模型

在一个理想的腔轴为 z 方向的光学腔中,强度依赖 J-C 模型中考虑一个运动的有效二能级原子与光场相互作用,在旋波近似下体系的有效哈密顿量可写为

基金项目: 安徽省高校省级自然科学基金重点资助项目 (KJ2009A131)

作者简介: 饶金同 (1984-), 男, 硕士研究生, 现从事量子光学的研究。

* 通讯联系人。E-mail: jliang@mail.ahnu.edu.cn

收稿日期: 2011-12-12; 收到修改稿日期: 2012-01-19

($\hbar=1$) :

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + g f(z) (\hat{R}^+ \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ \hat{R}) \quad (1)$$

式中 \hat{a}^+ 和 \hat{a} 分别是频率为 ω 的光场的产生和湮灭算符, $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$ 分别表示跃迁频率为 ω_0 的二能级原子的赝自旋算符(下标 + 和 - 表示升、降算符), g 为原子与单模光场的耦合常数, $f(z)$ 为场模的形式函数。且 $\hat{R} = \hat{a} \sqrt{\hat{n}}$ 和 $\hat{R}^+ = \sqrt{\hat{n}} \hat{a}^+$ 分别表示频率为 ω 光场的强度依赖产生和湮灭算符, 而 $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ 是量子化光场的粒子数算符。

假定原子沿腔的 z 轴方向移动, 速度为 v , 场模为 TE_{mnp} (下标 m, n, p 为场模结构参量), 腔长为 L 。只考虑场模形式函数 $f(z)$ 对 z 的依赖关系。因此, 原子的运动可以直接写成:

$$f(z) \rightarrow f(vt) = \sin\left(\frac{p\pi vt}{L}\right) \quad (2)$$

在原子 2 维子空间中, 可推得相互作用表象中系统时间演化算符 $\hat{U}_i(t, \rho)$ 的矩阵表示形式为:

$$\hat{U}_i(t, \rho) = \begin{bmatrix} C(t) & -iD(t) \\ -iS(t) & T(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,

$$C(t) = \cos\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 (\hat{n} + 1)^2}\right] - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 (\hat{n} + 1)^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 (\hat{n} + 1)^2}} \quad (4)$$

$$D(t) = g\Omega \hat{a} \sqrt{\hat{n}} \frac{\sin\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 \hat{n}^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 \hat{n}^2}} \quad (5)$$

$$S(t) = g\Omega \sqrt{\hat{n}+1} \frac{\sin\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 (\hat{n} + 1)^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 (\hat{n} + 1)^2}} \quad (6)$$

$$T(t) = \cos\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 \hat{n}^2}\right] + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 \hat{n}^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \Omega^2 \hat{n}^2}} \quad (7)$$

式中 $\Delta = \omega_0 - \omega$ 为失谐量, $\Omega = \int_0^t f(z) dt'$ 。假定初始时刻原子处在基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 的叠加态:

$$|\varphi_a(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|g\rangle \quad (8)$$

光场处于相干态:

$$|\varphi_f(0)\rangle = \sum_n \exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \times \frac{\bar{n}^{n/2}}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (9)$$

式中 \bar{n} 为场模的初始平均光子数, 取激发方向角 $\Phi_c = 0$ 。这样, 可以得到原子、光场以及整个系统初始时刻的密度算符:

$$\rho_a(0) = \begin{bmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\rho_s(0) = |\Psi_f(0)\rangle \langle \Psi_f(0)| \quad (11)$$

$$\rho_s(0) =$$

$$\begin{bmatrix} |a|^2 |\Psi_f(0)\rangle \langle \Psi_f(0)| & ab^* |\Psi_f(0)\rangle \langle \Psi_f(0)| \\ ba^* |\Psi_f(0)\rangle \langle \Psi_f(0)| & |b|^2 |\Psi_f(0)\rangle \langle \Psi_f(0)| \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$ 。下标 s, f, a 分别表示原子和光场组成的系统、光场子系统和原子子系统。

进一步利用时间演化算符 $\hat{U}_i(t, \rho)$, 可得任意时刻的密度算符分别为:

$$\rho_a(t) = \begin{bmatrix} \sum_n |\langle n|A\rangle|^2 & \sum_n \langle n|A\rangle \langle B|n\rangle \\ \sum_n \langle n|B\rangle \langle A|n\rangle & \sum_n |\langle n|B\rangle|^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\rho_f(t) = |A\rangle \langle A| + |B\rangle \langle B| \quad (14)$$

$$\rho_s(t) = \begin{bmatrix} |A\rangle \langle A| & |A\rangle \langle B| \\ |B\rangle \langle A| & |B\rangle \langle B| \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中,

$$|A\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos[g\Omega(n+1)] \sum_n F_n |n\rangle - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} \sin[g\Omega n] \sum_n F_n |n-1\rangle \quad (16)$$

$$|B\rangle = -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin[g\Omega(n+1)] \sum_n F_n |(n+1)\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} \sum_n \cos[g\Omega n] |F_n|n\rangle \quad (17)$$

$$\langle n|A\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos[g\Omega(n+1)] e^{-\frac{\bar{n}}{2}} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} -$$

$$i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} \sin[g\Omega(n+1)] e^{-\frac{n}{2}} \frac{\bar{n}^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{(n+1)!}} \quad (18)$$

$$\langle n|B\rangle = -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin[g\Omega n] e^{-\frac{n}{2}} \frac{\bar{n}^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{(n-1)!}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos[g\Omega n] e^{i\varphi} \times e^{-\frac{n}{2}} \times \frac{\bar{n}^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \quad (19)$$

2 强度依赖 J-C 模型中的量子态保真度

为了描述量子态在传播过程中初态和末态偏差程度,人们引入了保真度的概念^[9],其定义为:

$$F(\rho_1, \rho_2) = [\text{Tr}(\sqrt{\rho_1 \rho_2} \sqrt{\rho_1})^{\frac{1}{2}}]^2 \quad (20)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 为两种态所对应的态密度算符, $F(\rho_1, \rho_2)$ 取值范围在 0~1 之间,当 $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ 时,表示信息在传播过程中完全失真,即表明初态和末态相互正交,而当 $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ 时,表示为理想信息传输过程,即表明初态和末态相同。一般情况下 $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$,表示信息在传播过程中存在失真现象。

由(10)式~(15)式,容易得到原子和光场组成的系统、光场子系统和原子子系统的量子态保真度分别为:

$$F_s(t) = |a|^2 |\langle \Psi_f(0)|A\rangle|^2 + |b|^2 |\langle \Psi_f(0)|B\rangle|^2 + 2\text{Re}[ab^* \langle \Psi_f(0)|B\rangle \langle A|\Psi_f(0)\rangle] \quad (21)$$

$$F_f(t) = |\langle A|\Psi_f(0)\rangle|^2 + |\langle \varphi_f(0)|B\rangle|^2 \quad (22)$$

$$F_a(t) = |a|^2 \sum_n |\langle n|A\rangle|^2 + |b|^2 \sum_n |\langle n|B\rangle|^2 + 2\text{Re}[a^* b \sum_n \langle n|A\rangle \langle B|n\rangle] \quad (23)$$

式中,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f(0)|A\rangle &= \sum_n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{n}{2}} \times \\ &\left(\frac{\bar{n}^n}{n!}\right) \times \cos[g\Omega(n+1)] + \\ &\sum_n -e^{-\frac{n}{2}} \times \left(\frac{\bar{n}^{2n+1}}{n! \sqrt{n+1}}\right) \times \\ &i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} \sin[g\Omega(n+1)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f(0)|B\rangle &= \sum_n -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{n}{2}} \times \\ &\left(\frac{\bar{n}^{2n-1}}{\sqrt{n!}}\right) \sqrt{n} \sin(g\Omega n) + \\ &\sum_n \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} e^{-\frac{n}{2}} \times \left(\frac{\bar{n}^n}{n!}\right) \cos[g\Omega n] \end{aligned} \quad (25)$$

由(21)式~(23)式所确定的系统及子系统光场和原子的量子态保真度可以看到,其大小不仅取决于

原子的初始状态(θ 和 φ),而且还取决于场模形式函数 $\Omega(t)$,而 $\Omega(t)$ 取决于原子运动速度 v 和场模结构参量 p 。下面分别讨论在不同的原子初态 θ 和 p 下,系统以及子系统量子态保真度的变化。

3 数值分析

图1~图3显示的是在一定的原子运动速度和场模结构参量条件下,不同的原子初始状态下体系的量子态保真度随“时间” gt 的演化规律。由图1~图3可以看到,当原子初始处于激发态($\theta=0$)或基态($\theta=\pi$)时,原子和光场总体系的、光场子体系的、原子子体系

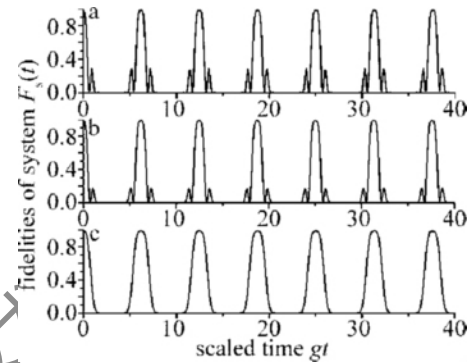


Fig. 1 Time evolution of $F_s(t)$ for $v = \frac{gl}{\pi}$, $p = 1$, $\varphi = 0$, $\bar{n} = 5$

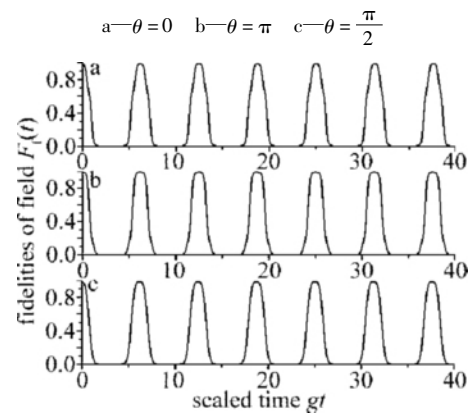


Fig. 2 Time evolution of $F_f(t)$ for $v = \frac{gl}{\pi}$, $p = 1$, $\varphi = 0$, $\bar{n} = 5$

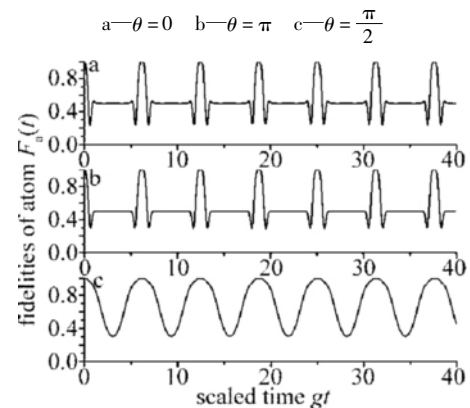


Fig. 3 Time evolution of $F_a(t)$ for $v = \frac{gl}{\pi}$, $p = 1$, $\varphi = 0$, $\bar{n} = 5$

$$a-\theta=0 \quad b-\theta=\pi \quad c-\theta=\frac{\pi}{2}$$

的量子态保真度演化曲线两者相比几乎完全一样,这表明体系、光场和原子的量子态演化与原子初始处于基态还是激发态没有关系。

当原子初始处于激发态和基态的同权重叠加态 ($\theta = \pi/2$) 时,光场子体系的量子态保真度演化曲线和处于激发态 ($\theta = 0$) 或基态 ($\theta = \pi$) 时演化曲线完全一致,没有发生变化,从而说明光场的量子态保真度演化与原子初始处于何种状态无关。但此时原子和光场组成的总系统和原子子系统的量子态保真度演化曲线有了明显变化,说明原子的初始状态对系统和原子保真度演化还是有影响的。

图4和图5是在一定的场模结构参量和原子的初始状态、不同的原子运动速度条件下体系的量子态保真度演化曲线。很明显,原子的运动速度也影响着体系的量子态保真度的演化。原子运动速度越快, $F_s(t)$ 、 $F_f(t)$ 和 $F_a(t)$ 各自峰的宽度越来越宽,这表明体系的量子态保真度越来越高。

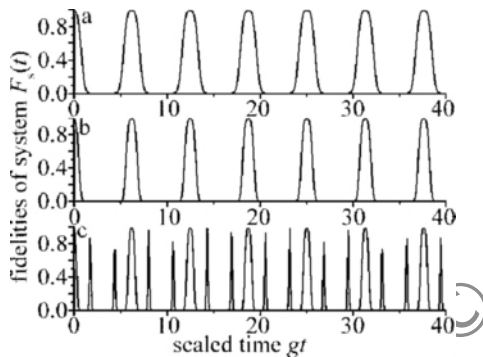


Fig. 4 Time evolution of $F_s(t)$ for $p=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $\bar{n}=5$

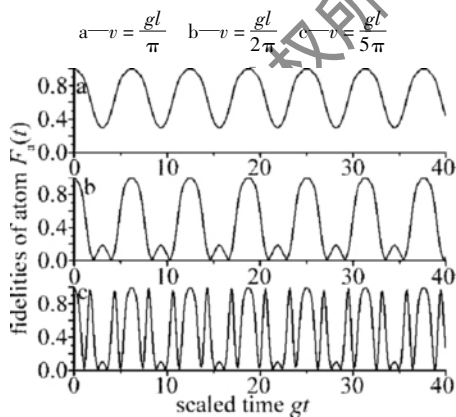


Fig. 5 Time evolution of $F_a(t)$ for $p=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $\bar{n}=5$

$$a-v=\frac{gl}{\pi} \quad b-v=\frac{gl}{2\pi} \quad c-v=\frac{gl}{5\pi}$$

这个现象从物理上再一次表明,在微腔中原子与光场相互作用的纠缠程度与原子的运动速度有关。原子的运动速度越快,与光场的纠缠程度越浅,从而使得原子和光场都向退纠缠状态逼近。数值计算表明:在 $p=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 条件下,相同的原子运动速度, $F_s(t)$ 和

$F_f(t)$ 的演化曲线是完全相同的。

图6、图7是在一定的原子运动速度和原子初始处于激发态和基态的同权重叠加态、不同的场模结构参量条件下体系的量子态保真度演化曲线。当场模结构参量分别取1、2和5,即腔模分别为 TEM_{001} , TEM_{002} 和 TEM_{005} 时,可以看到:随着场模结构参量的增加,系统、光场、原子对应的峰越来越宽越来越高,这样,它们的量子态保真度也就越来越高。同样,通过数值计算表明,在 $v=\frac{gl}{\pi}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$ 时,相同的场模结构参量, $F_s(t)$ 和 $F_f(t)$ 演化曲线是完全相同的。

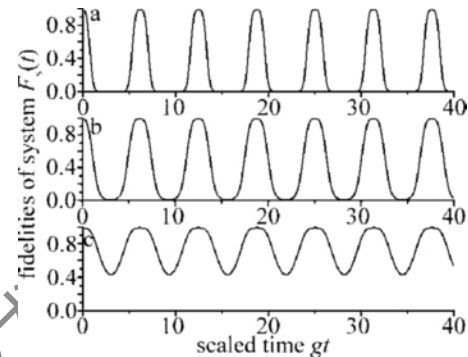


Fig. 6 Time evolution of $F_s(t)$ for $v=\frac{gl}{\pi}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $\bar{n}=5$

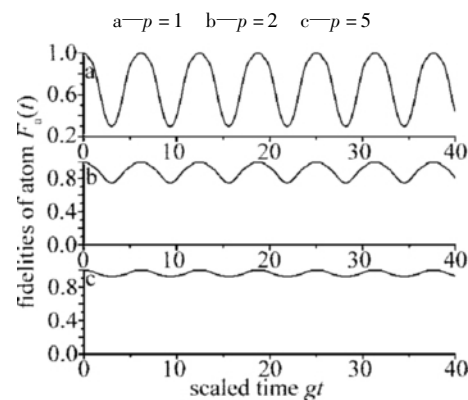


Fig. 7 Time evolution of $F_a(t)$ for $v=\frac{gl}{\pi}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $\bar{n}=5$

$$a-p=1 \quad b-p=2 \quad c-p=5$$

4 结 论

运用全量子理论,通过数值计算研究了相干光场作用下强度依赖 J-C 模型中含原子运动的量子态保真度的演化,讨论了不同原子初态条件下,原子运动速度和场模结构参量对体系中的量子态保真度影响。结果表明,在相干光场作用下,原子初始时刻所处状态对原子和光场组成的系统、光场子系统、原子子系统的量子态保真度值影响不大。初始处于基态和激发态同权重叠加态的原子运动速度越快,量子态保真度越高;场模结构参量越大,量子态保真度越高。由于在原子与分子物理的实际试验中常常会遇到原子运动和场模结构参

量对试验的影响,因此,这种研究在量子态的制备和量子关联特性方面具有一定的实际意义。

参 考 文 献

- [1] EBERLY J H, NAROZHNY N B, SANCHEZ-MONDRAGON J J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model [J]. *Physical Review Letters*, 1980, 44(20): 1323-1326.
- [2] MILBURN G J. Interaction of a two-level atom with squeezed light [J]. *Journal of Modern Optics*, 1984, 31(6): 671-679.
- [3] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. *Physical Review Letters*, 1935, 47(10): 777-780.
- [4] BENNETT C H, LOUDON R, PEGG D T, *et al.* Communication using quantum states [J]. *Journal of Modern Optics*, 1994, 41(12): 2351-2373.
- [5] BOSCHI D, BRAANCA S, de MARTINI F, *et al.* Experimental realization of teleporting an unknown pure via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(6): 1121-1125.
- [6] ZHANG Y D. Principles of quantum information physics [M]. Beijing: Science Press, 2006: 253-255 (in Chinese).
- [7] HILLERY M, BUŽEK V, BERTHIAUME A. Quantum secret sharing [J]. *Physical Review*, 1999, A59(3): 1829-1834.
- [8] HILLERY M. Quantum cryptography with squeezed states [J]. *Physical Review*, 2000, A61(2): 22309.
- [9] JOZSA R. Fidelity for mixed quantum states [J]. *Journal of Modern Optics*, 1994, 41(12): 2315-2323.
- [10] TIAN Y H, XU D H, HAN L B. Fidelity of quantum information in a pair atoms of entanglement state interacting with the squeezed vacuum field [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2006, 23(2): 255-261.
- [11] LI Y J, ZHANG Y L. Evolution of the fidelity in the degenerate Raman process [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2004, 21(4): 468-472 (in Chinese).
- [12] LIU T K, WANG J S, ZHAN M S. The fidelities of quantum states of system in Jaynes-Cummings model containing atom motion [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2001, 18(1): 58-63 (in Chinese).