

文章编号: 1001-3806(2012)01-0037-05

## Ronchi 光栅误差的数值仿真

杨仁付<sup>1</sup> 朱孝立<sup>1</sup> 陈军宁<sup>2</sup>

(1. 安徽财贸职业学院 电子信息系, 合肥 230601; 2. 安徽大学 电子科学与技术学院, 合肥 230039)

**摘要:** 为了解决光栅制造误差影响莫尔计量精度的问题, 运用傅里叶光学理论和坐标变换方法给出了完整的莫尔条纹透光函数表达式, 并用线性系统叠加理论对光栅误差函数进行模拟, 再用得到的莫尔条纹模型对光栅误差进行仿真, 获得了短周期误差和长周期误差的莫尔条纹波形, 最后对误差仿真结果进行了分析和验证。结果表明, 光栅短周期误差造成莫尔条纹信号波形出现高次谐波干扰, 但数字滤波能有效消除其对计量精度的影响, 而光栅长周期误差会严重影响光栅检测系统输出精度。

**关键词:** 衍射与光栅; 误差; 莫尔条纹; 仿真; 傅里叶变换

**中图分类号:** O438.2 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.01.011

## Error simulation of Ronchi gratings

YANG Ren-fu<sup>1</sup>, ZHU Xiao-li<sup>1</sup>, CHEN Jun-ning<sup>2</sup>

(1. Department of Electronic Information, Anhui Finance & Trade Vocational College, Hefei 230601, China; 2. Institute of Electronic Science and Technology, Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** In order to study the effect of grating manufacturing error on the accuracy of Moiré metrology, a transmittance function for Moiré fringes was built based on Fourier optical theory and coordinate conversion. The grating error function was simulated by means of linear superimposition. The grating errors were simulated based on previously received moiré fringe models. The Moiré fringe waveform caused by the short-period errors and long-period errors were obtained. Simulation results were analyzed and verified. Although short-period grating error induces high-order harmonics of Moiré fringe signal, its effect on measurement accuracy can be effectively removed after digital filtering. The long-period grating error can affect the accuracy of a grating test system.

**Key words:** diffraction and grating; error; Moiré fringe; simulation; Fourier transform

## 引言

透射式黑白线性光栅也称为 Ronchi 光栅。将一块 Ronchi 光栅相对另一块旋转一定的角度并做相对运动, 就会在光栅的输出面产生与运动方向和位移量对应的莫尔条纹(Moiré fringe), 光栅位移传感器和光电旋转编码器通过对莫尔条纹的计数获得被测对象的位移量或转角量。

莫尔计量的精度在很大程度上取决于光栅本身的制造精度。无论用传统刻划方法还是采用激光束连续加工制造光栅<sup>[1]</sup>, 都会受到机械传动、数据圆整和加工环境影响而产生光栅加工误差。光栅误差的传递过程以及它对莫尔条纹计量结果的影响机理比较复杂, 以往对光栅误差的分析多是利用莫尔条纹

间距公式对误差做静态推算, 或通过实验测试给出统计结果<sup>[2-3]</sup>, 这些方法往往只能对特定光栅做有限的误差参量分析。另外, 光栅传感器由于受到周期振动、码盘偏心、光栅表面不平整或灰尘污染等影响也会对莫尔条纹的输出信号带来影响, 情况严重时会造成传感器工作失效, 这些过程误差常常表现出跟光栅误差相似的特性, 在一定的条件下, 可以用光栅误差分析方法对它们加以分析和仿真, 如果能够找到有效的数值仿真方法以确定各种误差因素对于传感器输出信号的影响规律, 并建立“光栅传感器误差-失效模型”将具有重要意义。

本文中从信息光学理论出发, 在给出了完整的莫尔条纹透光率函数表达式的基础上, 运用线性系统叠加原理对光栅误差进行了仿真, 获得光栅短周期误差和长周期误差条件下的莫尔条纹波形, 并分析了光栅误差对光栅计量准确性的影响以及应该采取的措施, 研究方法和结果对光栅传感器制造和莫尔计量误差分析理论具有参照意义。

**作者简介:** 杨仁付(1964-), 男, 副教授, 主要从事数值计算与系统仿真的研究。

E-mail: fry168@sina.com

收稿日期: 2011-06-17; 收到修改稿日期: 2011-07-01

## 1 频域下光栅方程和莫尔条纹模型

计量光栅通常由  $G_1$  和  $G_2$  2 块 Ronchi 光栅构成。Ronchi 光栅的空间函数可以看作是矩形函数和一个梳状函数的卷积。设  $G_1$  光栅的栅距(周期)为  $T$ , 透光缝宽度值取  $a$ , 光缝高度为 1, 栅线平行于  $y$  轴, 于是光栅的空间函数可以写为:

$$G(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{T} \text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) \quad (1)$$

图 1 是莫尔条纹数学解析图。

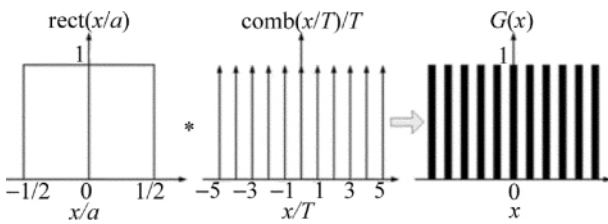


Fig. 1 Grating function described by the convolution of the two functions

矩形函数在  $x < a/2$  时值为 1, 其它为 0; 梳状函数  $\text{comb}\left(\frac{x}{T}\right)$  是周期为  $T$  的周期函数, 可将其展开成傅里叶级数表示, 即:

$$\text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi nx/a) \quad (2)$$

式中,  $c_0 = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \delta(x) dx = 1$ ;  $c_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \exp(-j2\pi nx/a) dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \exp(-j2\pi nx/a) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \delta(x) \exp(-j2\pi nx/a) dx = 1$ 。

$$\text{于是, } \text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi nx/a) \quad (3)$$

而矩形函数的傅里叶级数形式为:

$$M(x) = \frac{aa'}{TT'\cos\gamma} + \left[ \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{T}\right) \cos(n\omega x) \right] x \tan\gamma + \frac{4aa'}{TT'\cos\gamma} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{ma'}{T'}\right) \cos(n\omega x) \cos\{m\omega'[x\cos\gamma + f'(x)\sin\gamma]\} \quad (10)$$

由(10)式可以看出, 相乘后得到的莫尔条纹透光函数完整方程是一个隐函数的超越方程, 无法直接求解。运用数学推理和计算机拟合方法, 得到如下的莫尔条纹透光函数的计算机模型<sup>[5]</sup>:

$$M(x) \approx \frac{aa'}{TT'\cos(1.419\gamma^{0.4992})} + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)x + \frac{4aa'}{TT'\cos(1.419\gamma^{0.4992})} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{na'}{T'}\right) \cdot \cos(n\omega x) \cos\left\{n\omega'[x\cos(1.419\gamma^{0.4992}) + \right.$$

$$\left. \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \int_{-a/2}^{a/2} F_n \exp(-j\omega t) dt \quad (4)$$

式中  $\omega$  是信号的频率,  $F_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-j\omega t) dt = aS_a\left(\frac{\omega a}{2}\right) = aS_a\left(\frac{\pi a}{T}\right)$ 。其中,  $p_a(t)$  是  $[-a/2, a/2]$  上幅值为 1 的矩形函数,  $S_a$  是通信中的采样函数。代入化简得到:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \int_{-a/2}^{a/2} F_n \exp(-j\omega t) dt = a \text{sinc}\left(\frac{a}{T}\right) \quad (5)$$

当单色平面波光源垂直射入光栅时, 设光缝透光率为 100% ( $=1$ ), 栅线透光率为 0, 于是,  $G_1$  光栅的透光率函数可以转变为以下的三角形形式傅里叶级数, 考虑到光栅在坐标系中的偶函数性质, 有:

$$f(x) = \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{T}\right) \cos(n\omega x) \quad (6)$$

光栅副中另一块光栅  $G_2$  的透光率函数用  $f'(x)$  表示,  $f'(x)$  可以看成是  $f(x)$  做坐标轴旋转  $\gamma$  角后的函数<sup>[4]</sup>。根据坐标变换关系:

$$\begin{cases} x' = x\cos\gamma + y\sin\gamma \\ y' = y\cos\gamma - x\sin\gamma \end{cases} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式, 得到光栅  $G_2$  透光率函数, 它是相对  $G_1$  做逆时针旋转  $\gamma$  角后的函数:

$$f'(x) = \frac{a'}{T'\cos\gamma} + x \tan\gamma + \frac{2a'}{T'\cos\gamma} \times \sum_{m=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{ma'}{T'}\right) \cos\{m\omega'[x\cos\gamma + f'(x)\sin\gamma]\} \quad (8)$$

当光栅副光栅叠合时产生莫尔条纹, 莫尔条纹的透光函数用  $M(x)$  表示, 并且有:

$$M(x) = f(x) \times f'(x) \quad (9)$$

将(6)式和(8)式代入(9)式, 即得到完整的莫尔条纹透光率函数表达式:

$$y_{n-1}'(x) \sin(1.419\gamma^{0.4992}) + \frac{\pi}{20} \} \quad (11)$$

该模型经过检验适合对 Ronchi 光栅莫尔条纹进行仿真和波形输出。

## 2 光栅误差仿真分析

光栅误差一般指光栅的制造误差, 它包括短周期(不匀)误差和长周期(不匀)误差。2 种光栅误差的特点以及各自对莫尔计量结果的影响很不相同。

## 2.1 短周期不匀误差 ( $\Delta E_s$ )

短周期不匀误差是指在整个光栅长度范围内,每隔一定距离即出现一根栅线变粗或变细的现象,短周期误差是普遍存在的最主要的光栅制造误差。图2a所示为放大后的光栅照片,从图中可以看到每间隔固定的距离就出现一个粗黑线。短周期不匀误差特色就是具有周期性。当把这种光栅与基准光栅组成光栅副,产生的莫尔条纹图像如图2b所示,可以看到莫尔条纹图像呈现明显的锯齿状,这将使光栅读数头检测到的信号中高次谐波增大,波形的正弦性和正交性变差。

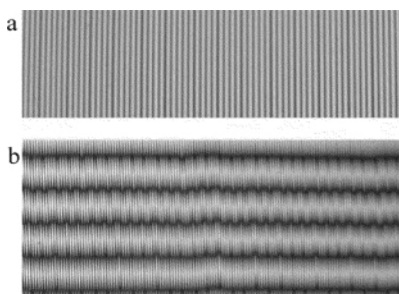


Fig. 2 Short-period error and its interference fringe

设信号占空比误差或正交误差为  $\Delta\theta$ , 光栅周期为  $W$ , 则短周期不匀误差的值可以由下式表示:

$$\Delta E_s = \left( \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right) W \quad (12)$$

短周期不匀误差是由于机械双周晃动、蜗轮副误差、丝杆分度误差等造成的;对于采用连续激光扫描方式制造的光栅,该误差通常被认为是因为设备精度低于光栅文件图形精度或计算机做余数修正造成的<sup>[6]</sup>。

在光栅检测系统中,存在误差的光栅一般是随运动部件一起移动的标尺光栅,而指示光栅由于面积很小,能够做到更高精度,因此,可以当作基准光栅对待。由于光栅检测系统属于线性系统,具有短周期误差的光栅  $G_3$  可以认为是由在一个  $G_1$  基准光栅上叠加了一个周期较大的窄缝光栅  $G_2$  所组成,图3显示这种短周期误差光栅的叠加特性,图中  $a''$  和  $T''$  是与基准光栅  $G_1$  对比的窄缝光栅  $G_2$  对应的宽度和周期。

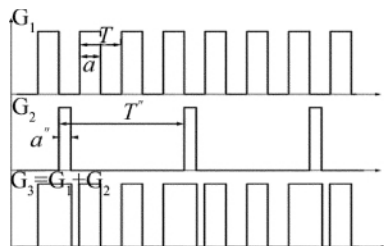


Fig. 3 Grating error expression based on superimposed method

当存在短周期误差的光栅与一个相同周期的基准光栅构成光栅副组合,产生的莫尔条纹透光函数,可以用上面的莫尔条纹模型加以仿真。现设短周期误差的

光栅是由下面两个光栅参量的叠加:  $f'(x): T_1 = 0.04\text{mm}, a_1 = 0.02\text{mm}; T_2 = 0.2\text{mm}, a_2 = 0.01\text{mm}$ 。而光栅副的另一块光栅为基准光栅,其参量为:  $f(x): T = 0.04\text{mm}, a = 0.02\text{mm}$ 。

将2块光栅参量代入到(11)式,栅线夹角  $\gamma = 1^\circ$ , 取  $n = 1000$  在 MATLAB 下编程仿真并通过 plot 绘图得到带有短周期误差的光栅莫尔条纹透光率函数波形,如图4所示。

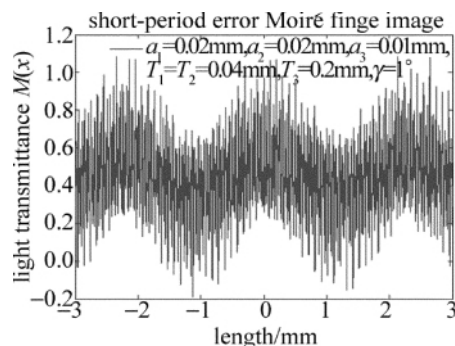


Fig. 4 Moiré fringe transmittance affected by short-period error

图5是相同参量但没有短周期误差的光栅副莫尔条纹仿真波形。比较图4和图5发现,短周期误差将引起莫尔条纹的输出信号中带有更多的高次谐波,这些高次谐波会对信号的整形和细分产生不利影响,进而降低光栅检测系统分辨力<sup>[6]</sup>。同时,仿真结果显示莫尔条纹信号周期基本不受光栅短周期误差的影响,也验证了莫尔计量周期“平差效应”特性。图6是型号为 LAM500CPI-6T 的光电二极管阵列输出的莫尔条纹光电流信号的示波器显示结果,上面一路为带短周期误差光栅在标准位置输出波形,下面一路为光栅

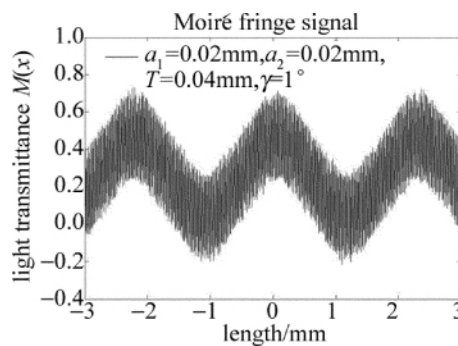


Fig. 5 Moiré fringes transmittance of reference grating pair

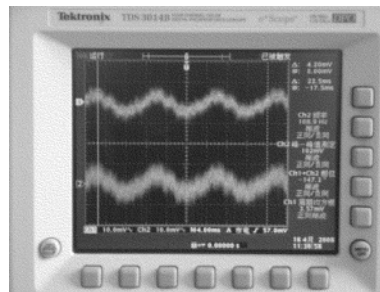


Fig. 6 Waveform of Moiré measured by oscillograph

付间隙增大后莫尔条纹型号波形,显然波形谐波噪声明显增大。

光栅短周期不匀误差导致莫尔条纹信号的高次谐波一般可以通过后级增加低通滤波器加以滤除,对于已知短周期误差参量的光栅检测系统,更可以运用数值滤波方法对高次谐波做彻底的抑制<sup>[7]</sup>。所以,虽然光栅短周期不匀误差会造成莫尔信号波形谐波增加,但是只要在后级电路上采取适当的滤波措施,基本不会对计量精度产生太大的影响。同样,对于因为振动、偏心、灰尘等造成的光栅误差也可以用类似的方法通过这一模型进行仿真分析。它对于莫尔计量技术具有重要理论和应用意义。

## 2.2 长周期不匀误差( $\Delta E_1$ )

长周期误差是指在整个光栅带工作长度内有一个或几个集中不匀区段,不匀区段长度和区段间的距离以及区段内光栅栅线的周期和线宽不严格呈周期分布。长周期不匀误差在不匀区的光栅莫尔条纹不仅出现明显锯齿状变化,而且,莫尔条纹的宽度也发生改变。

对光栅长周期误差仍用叠加理论给予模拟,取光栅副参量:

$$f(x) : \begin{cases} T_1 = 0.04\text{mm} & \mu_1 = 0.02\text{mm} \\ T_2 = 5\text{mm} & \mu_2 = 0.01\text{mm} \\ T_3 = 5.1\text{mm} & \mu_3 = 0.02\text{mm} \\ T_4 = 5.3\text{mm} & \mu_4 = 0.05\text{mm} \end{cases} ; f(x) : T = 0.04\text{mm},$$

$a = 0.02\text{mm}$ 。代入到(10)式莫尔条纹模型,取栅线夹角 $\gamma = 1^\circ$ ,在MATLAB下面仿真得到5mm长周期误差的光栅和一个基准光栅产生的莫尔条纹图像,见图7。

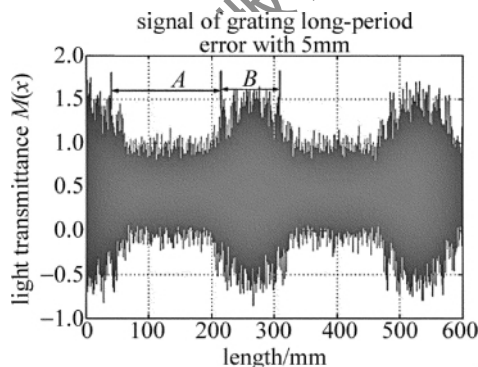


Fig. 7 Moiré fringe waveform with long-period grating error

现在对仿真结果做周期验证,已知光栅的周期 $T = 0.04\text{mm}$ ,仿真的长周期误差周期 $T' = 5\text{mm}$ ,所以,长周期范围内的栅线数 $N = 5 / 0.04 = 125$ ,即当光栅副相对位移时,长周期误差应该出现在125条莫尔条纹以后区段,根据莫尔条纹间距公式<sup>[8]</sup>:

$$W = \frac{T}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \quad (13)$$

求得 $W = \frac{0.04}{2 \sin \frac{1}{2}} = 2.29\text{mm}$ ,因此莫尔条纹波形的误差

周期 $T_e = 2.29 \times 125 = 286\text{mm}$ 。

图7显示的周期符合验证结果。图7中,A段表示没用受到误差影响的正常莫尔条纹输出部分,B段表示莫尔条纹图像出现畸变部分。图8是B段中截取一部分的放大图形,可以看出B段中的莫尔条纹已经完全失去了正弦性,如果后级不能做有效的滤波和波形提取,光栅检测系统几乎无法检测相位差信号,必然造成计数失效,造成计量结果严重错误。需要说明的是,因为长周期误差的形态千差万别,同时受到PC机的计算时效性限制,本文中输入的误差样本量较小,这种有限的仿真难以完全反映该类型误差的全貌,但仿真结果已经证明该误差的基本特性。所以,光栅长周期误差属于粗大误差,在光栅检测系统中一般不允许出现,否则会给检测结果带来严重影响。

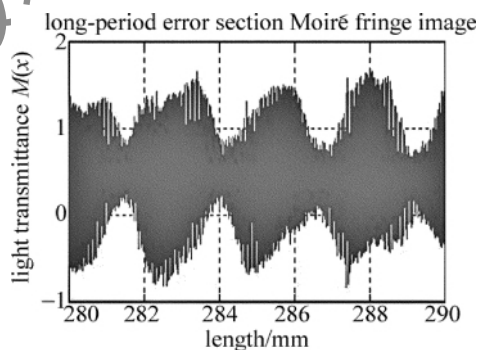


Fig. 8 Effect of long-period grating error on Moiré fringes

## 3 结论

由于受到机械运动固有误差影响以及制造过程中数字取整和加工精度约束,光栅不匀误差难以避免。由于传统刻划方法制造的光栅效率低,因此,在大量中低精度工业设备中使用激光光绘和直刻工艺制造的光栅逐渐增多,这类光栅不仅制造周期短、成本低,而且单根长度能够做到几米甚至几十米范围,因此,获得了广泛的应用。但是,这类低成本光栅特别是单根超长光栅一般带有更大的不匀误差,这些误差会给光栅检测与计量系统带来怎样的影响,因此需要找出一种有效的光栅误差分析方法,以分析和确定光栅误差对莫尔条纹计量系统的影响。通过莫尔条纹透射函数仿真模型对光栅误差进行分析和研究,结果表明:光栅短周期不匀误差会给莫尔条纹信号波形带来高次谐波,但是通过后级滤波,系统能够克服误差的影响,光栅的

“平差效应”特性保证光栅短周期误差对莫尔条纹计量精度不会造成太大影响;光栅长周期不匀误差会导致莫尔条纹波形的严重畸变,给信号检测和处理带来系统误差,甚至导致无法读取信号波形,因此,需要尽量避免带有长周期误差的光栅出现在检测系统中。

作者提出的光栅误差分析方法也可以运用到对光栅传感器的振动、码盘偏心等误差的分析研究中<sup>[9]</sup>,所提到的方法和结论对光栅传感器制造和应用以及莫尔计量理论研究具有参考价值。

#### 参 考 文 献

- [1] GAMET E, JOURLIN Y, REYNAUD S, *et al.* Continuous writing technique of long gratings for metrological applications[J]. *Proceedings of SPIE* 2006 6188: 618808/1-618808/6.
- [2] JING G, YE J. The error analysis about the grating length sensor[J]. *Journal of Qingdao University*, 1996, 11(12): 24-28 (in Chinese).
- [3] ZHU Y Sh, YANG J T. Study of Moiré fringe signals with high accuracy and superior quality in radial gratings[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 1995, 16(4): 280-285 (in Chinese).

- [4] MORIMOTO Y, SEGUCHI Y, DAIFUKU K. Fourier-transform Moiré method with consideration of misalignment [J]. *Experimental Mechanics*, 1994, 34(12): 350-351.
- [5] ZHU X L, CHEN J N. Modeling of Moiré patterns based on Ronchi grating[J]. *Journal of System Simulation*, 2010, 22(1): 12-15 (in Chinese).
- [6] CAO X Q, HUANG W Sh, JIN T. Grating measuring technology [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1992: 158-229 (in Chinese).
- [7] SCIAMMARELLA C A, STURGEON D L. Digital-filtering techniques applied to the interpolation of Moiré-fringes data [J]. *Experimental Mechanics*, 1967, 7(11): 468-475.
- [8] YE Sh X. Photoelectric displacement precision measuring technology [M]. Chengdu: Sichuan Science and Technology Press, 2003: 89-126 (in Chinese).
- [9] HUANG T, HU Y H. Simulation and modeling of lidar waveforms returned from obscure targets [J]. *Laser Technology*, 2011, 35(1): 11-14 (in Chinese).

(上接第25页)

场的快速和准确反演。不过 LM 最小二乘法对于初值的选择比较挑剔,因此为避免陷入局部最小解,可先使用全局搜索算法确定其初始搜索区域,再利用 LM 最小二乘法快速收敛于最优解,以使算法的鲁棒性更强。

#### 参 考 文 献

- [1] LAI D, CHEN Y, ZHOU D F, *et al.* Beam scanning of lidar and the simulation of the improved VAD inversion methods [J]. *Laser Technology* 2008, 32(6): 584-586 (in Chinese).
- [2] WANG B X, SHEN F H, SUN D S, *et al.* Beam scanning and wind field measurement of direct-detection Doppler lidar [J]. *Infrared and Laser Engineering* 2007, 36(1): 69-72 (in Chinese).
- [3] REN P, WANG Y L, KANG D Y, *et al.* Numerical optimization in VAD inversion technique for wind lidar [J]. *Laser Technology* 2009, 33(6): 664-666 (in Chinese).
- [4] WANG X Q, DONG Y Q, YUAN Sh, *et al.* Study on simulation of micro-Doppler effect in lidar [J]. *Laser Technology* 2007, 31(2): 117-119 (in Chinese).
- [5] SAMMY W H, STEPHEN M H. Advanced coherent lidar system for wind measurements [J]. *Proceedings of SPIE* 2005, 5887: 588-601.

- [6] EMMETT G D, HANDLEY C. Airborne Doppler lidar surface returns, data products other than tropospheric winds [J]. *Proceedings of SPIE*, 2003, 4893: 319-326.
- [7] WAN R, TANG D Z, ZHANG P, *et al.* Velocity azimuth display elementary analysis of nonlinear wind field [J]. *Scientia Meteorologica Sinica* 2003, 23(3): 314-324 (in Chinese).
- [8] SARA C T, BREWER W A, ROBERT M B. Doppler lidar estimation of mixing height using turbulence, shear, and aerosol profiles [J]. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 2008, 26(2): 673-688.
- [9] XU Q Y, NING H Sh, CHEN W Sh, *et al.* Applications of meteorological radar for the civil aviation safety [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(9): 2147-2151 (in Chinese).
- [10] WEISSMANN M, BRAUN F J, GANTNER L, *et al.* The alpine mountain-plain circulation: airborne Doppler lidar measurements and numerical simulations [J]. *American Meteorological Society*, 2005, 12(11): 3095-3109.
- [11] LI D M, ZHENG Y Ch, PAN J Y, *et al.* Index system of coherence Doppler wind lidar [J]. *Optical Technique* 2010, 36(6): 880-884 (in Chinese).