

## 余弦高斯光束的传输特性\*

王喜庆 柯尊平

吕百达\*\*

(西南交通大学应用物理系, 成都, 610031) (四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 对新型光束——余弦高斯光束在无光阑情况下自由空间的传输及通过薄透镜的传输和聚焦特性进行了分析计算。给出了在自由空间传输及通过薄透镜聚焦场的解析式, 以及轴上光强和相对焦移的解析表达式, 并对计算结果进行了比较。

关键词: 余弦高斯光束 自由空间 薄透镜 传输

### Propagation properties of cosine-Gaussian beams

Wang Xiqing, Ke Zunping

(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

L Baida

(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

**Abstract** The properties of cosine-Gaussian beams propagating in free space and propagating through an unapertured thin lens are respectively analyzed and calculated. The closed form expressions of the diffraction field are obtained by using the general Huygens-Fresnel diffraction integral. Axial intensity and relative focal shift are derived. The calculated results are analyzed and compared.

**Key words:** cosine-Gaussian beams free space thin lens propagation

\* 西南交通大学科学研究基金资助。 \*\* 西南交通大学客座教授。

## 4 试验结果

光谱波长  $\lambda = 632.8\text{nm} \pm 3.5\text{nm}$ , 光强调制频率  $f_0 = 100\text{Hz}$ , 最大试验距离  $z = 5\text{m}$  时,  $x, y$  的分辨率小于  $0.12\mu\text{m}$ , 在  $200\mu\text{m}$  的范围内, 定位精度  $0.5\mu\text{m}$ 。在  $1000\text{lx}$  光辐射强度下的信噪比为  $-20\text{dB}$ , 并且工作光谱可在  $400\text{nm} \sim 900\text{nm}$  段内随激光的光谱调节。

理论和试验证明无衍射光莫尔条纹激光准直跟踪和定位系统可以用于工业环境的中远距离的定位、准直和跟踪。这种技术将获得广泛的应用。

### 参 考 文 献

- 1 赵 斌, 李 柱. 华中理工大学学报, 1997; (3):
- 2 张 青, 赵 斌, 范光照 *et al.* 华中理工大学学报, 1997; (9): 1~ 3
- 3 严瑛白. 应用物理光学. 北京: 机械工业出版社, 1990: 11
- 4 Zhang X B, Zhao B, Li Zh. Typical signal processing technique in the special dual-dimensional optoelectronic sensor, 1st International Symposium on Instrumentation Science and Technology, Proceedings of ISIST' 99, Luoyang, China, China Metrology Press, Aug. 23~ 26, 1999: 334~ 337

作者简介: 张新宝, 男, 1965 年出生。讲师。现从事激光应用技术和精密工程工作。

## 引 言

最近 Casperson 和 Tover 等人给出了波动方程在直角坐标系下的新解,即厄米正弦类高斯(HSG)光束,并对其产生、场分布及传输作了详细的研究<sup>[1~3]</sup>。事实上,厄米正弦类高斯光束包含了更广泛的光束,如高斯光束、厄米高斯光束、双曲正弦、双曲余弦高斯光束及正弦、余弦高斯光束都可视为其特例。我们采用广义的菲涅耳衍射积分<sup>[4]</sup>对余弦高斯光束通过自由空间、薄透镜的传输和聚焦特性进行了详细的研究,给出了余弦高斯光束在自由空间传输及通过薄透镜的解析解,并对其聚焦特性进行了数值计算,得到了有意义的结果。

### 1 余弦高斯光束在无光阑情况下的传输

余弦高斯光束在  $z = 0$  平面的场分布由下式给出<sup>[1]</sup>:

$$E_0(x, y, 0) = A_0 \exp(-x^2/w_0^2) \exp(-y^2/w_0^2) \cos(\Omega_0 x) \cos(\Omega_0 y) \quad (1)$$

式中,  $w_0$  为高斯光束的束腰宽度,  $\Omega_0$  是与余弦项相关的参数,  $A_0$  为一常数。

当余弦高斯光束通过由  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  表达的一阶近轴光学系统时,其场分布由广义惠更斯-菲涅耳衍射积分描述<sup>[4]</sup>:

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda B} \int_{-a}^a \int_{-b}^b E_0(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-\frac{ik}{2B} [A(x_0^2 + y_0^2) - 2(x_0 x + y_0 y) + D(x^2 + y^2)]\right\} dx_0 dy_0 \quad (2)$$

式中,  $k$  代表波数,  $\lambda$  代表波长,  $a, b$  分别代表  $x, y$  方向光阑的半宽, (2) 式中略去了不重要的相位因子。将 (1) 式代入 (2) 式, 并令  $a \rightarrow \infty$  和  $b \rightarrow \infty$ , 使用积分公式<sup>[5]</sup>:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(xy) dx = \pi^{1/2} a^{-1/2} e^{-y^2/(4a)}/2 \quad (3)$$

得:

$$E(x', y', z) = A \frac{q_0}{q_0 A + B} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2(A q_0/B + 1)}\right] \exp(-q_0 x'^2/q) \exp(-q_0 y'^2/q) \\ \times \cos\left(\frac{q_0 \alpha}{q_0 A + B} x'\right) \cos\left(\frac{q_0 \alpha}{q_0 A + B} y'\right) \quad (4)$$

式中,  $q_0, q$  分别代表  $z = 0$  和  $z$  平面处的  $q$  参数, 由  $ABCD$  定律,  $1/q = (Cq_0 + D)/(Aq_0 + B)$ ;  $x' = x/w_0, y' = y/w_0$  为归一化坐标;  $\alpha = w_0 \Omega_0$  表示调制参数。

(4) 式为余弦高斯光束在无光阑情况下, 通过一阶近轴光学系统的场分布。

(1) 当余弦高斯光束在自由空间传输时, 对应的  $ABCD$  矩阵为:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

由 (4) 式得:

$$E(x', y', z) = A \frac{i\pi N_w}{i\pi N_w + 1} \exp\left[-\frac{\alpha^2/2}{i\pi N_w + 1}\right] \exp\left[-\frac{i\pi N_w}{i\pi N_w + 1} x'^2\right] \\ \times \exp\left[-\frac{i\pi N_w}{i\pi N_w + 1} y'^2\right] \cos\left[\frac{i\pi N_w \alpha}{i\pi N_w + 1} x'\right] \cos\left[\frac{i\pi N_w \alpha}{i\pi N_w + 1} y'\right] \quad (6)$$

式中,  $N_w = w_0^2/(\lambda z)$  是余弦高斯光束的菲涅耳数;  $A$  为常数。

任一点  $(x', y', z)$  的光强为:

$$I(x', y', z) = A_0 \frac{\pi^2 N_w^2}{1 + \pi^2 N_w^2} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{1 + \pi^2 N_w^2}\right] \exp\left[-\frac{2\pi^2 N_w^2}{1 + \pi^2 N_w^2} x'^2\right]$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[-\frac{2\pi^2 N_w^2}{1 + \pi^2 N_w^2} y'^2\right] \left[ \cos\left(\frac{2\pi^2 N_w^2}{1 + \pi^2 N_w^2} \alpha x'\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi N_w}{1 + \pi^2 N_w^2} \alpha x'\right) \right] \\ & \times \left[ \cos\left(\frac{2\pi^2 N_w^2}{1 + \pi^2 N_w^2} \alpha y'\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi N_w}{1 + \pi^2 N_w^2} \alpha y'\right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

令(6)式中  $z \rightarrow \infty$ , 得到余弦高斯光束在自由空间传输时, 其远场的场分布及光强分别为:

$$\begin{aligned} E(x', y', z \rightarrow \infty) &= A (i\pi N_w) \exp(-\alpha^2/2) \exp[-(i\pi N_w + \pi^2 N_w^2) x'^2] \\ & \times \exp[-(i\pi N_w + \pi^2 N_w^2) y'^2] \operatorname{ch}(\pi N_w \alpha x') \operatorname{ch}(\pi N_w \alpha y') \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I(x', y', z) &= A_0 \pi^2 N_w^2 \exp(-\alpha^2) \exp(-2\pi^2 N_w^2 x'^2) \exp(-2\pi^2 N_w^2 y'^2) \\ & \times [1 + \operatorname{ch}(2\pi N_w \alpha x')] [1 + \operatorname{ch}(2\pi N_w \alpha y')] \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 当余弦高斯光束通过焦距为  $f$  的无光阑薄透镜时, 有:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z/f & f + \Delta z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中,  $\Delta z = z - f$ 。由(10)式代入(4)式得到:

$$\begin{aligned} E(x', y', z) &= A \frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z (1 - i\pi N_f)/f} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2[1 - i\pi N_f \Delta z/(f + \Delta z)]}\right\} \\ & \times \exp\left[-\frac{i\pi N_f (1 - i\pi N_f)}{1 + \Delta z (1 - i\pi N_f)/f} x'^2\right] \exp\left[-\frac{i\pi N_f (1 - i\pi N_f)}{1 + \Delta z (1 - i\pi N_f)/f} y'^2\right] \\ & \times \cos\left[\frac{i\pi N_f \alpha}{1 + \Delta z (1 - i\pi N_f)/f} x'\right] \cos\left[\frac{i\pi N_f \alpha}{1 + \Delta z (1 - i\pi N_f)/f} y'\right] \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $N_f = w^2/\lambda$ 。当  $\Delta z = 0$  时, 即为远场分布, 与余弦高斯光束在自由空间传输  $z \rightarrow \infty$  时的结果一致。当  $x' = 0$  及  $y' = 0$  时,  $I = |E(0, 0, z)|^2$  即为轴上光强分布:

$$I = A^2 \frac{\pi^2 N_f^2}{(1 + \Delta z/f)^2 + \pi^2 N_f^2 (\Delta z/f)^2} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{1 + [(\Delta z/f)\pi N_f/(1 + \Delta z/f)]^2}\right\} \quad (12)$$

令  $dI/d(\Delta z/f) = 0$ , 得关于  $\Delta z/f$  的一元三次方程:

$$(\pi^2 N_f^2 + 1)^2 (\Delta z/f)^3 + (3\pi^2 N_f^2 - \pi^2 N_f^2 \alpha^2 + 3) (\Delta z/f)^2 + (\pi^2 N_f^2 - \pi^2 N_f^2 \alpha^2 + 3) (\Delta z/f) + 1 = 0$$

解一元三次方程, 其 3 个根为:

$$(\Delta z/f)_1 = \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} + \sqrt{\delta} \right]^{1/3} + \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} - \sqrt{\delta} \right]^{1/3} - \frac{Y}{3\beta} \right\} \right. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\Delta z/f)_2 &= \left[ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} + \sqrt{\delta} \right]^{1/3} + \left[ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right. \\ & \times \left. \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} - \sqrt{\delta} \right]^{1/3} - \frac{Y}{3\beta} \right\} \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\Delta z/f)_3 &= \left[ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} + \sqrt{\delta} \right]^{1/3} + \left[ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right. \\ & \times \left. \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{2Y^3}{3^3 \beta^3} - \frac{Y\mu}{3\beta^2} - \sqrt{\delta} \right]^{1/3} - \frac{Y}{3\beta} \right\} \right. \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $\delta = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\beta} + 2 \left( \frac{Y}{3\beta} \right)^3 - \frac{Y\mu}{3\beta^2} \right]^2 + \frac{1}{27} \left[ \frac{\mu}{\beta} - \frac{Y^2}{3\beta^2} \right]^3$ ,  $\beta = (\pi^2 N_f^2 + 1)^2$ ,  $\gamma = 3(\pi^2 N_f^2 + 1) - \pi^2 N_f^2 \alpha^2$ ,  $\mu = \pi^2 N_f^2 (1 - \alpha^2) + 3$ 。

当  $\delta > 0$  时, 由(13)式、(14)式及(15)式分析知,  $(\Delta z/f)_1$  为实数,  $(\Delta z/f)_2$  和  $(\Delta z/f)_3$  均为复数, 此时相对焦移  $\Delta f/f = (\Delta z/f)_1$  (16) 式中,  $\Delta f = z_{\max} - f$  表示轴上光强最大值位置点(实际焦点)  $z_{\max}$  与几何焦点  $f$  之差。当  $\delta \leq 0$  时,  $(\Delta z/f)_1$ ,  $(\Delta z/f)_2$  和  $(\Delta z/f)_3$  均为实数, 此时, 相对焦移为最大光强所对应的  $\Delta z/f$ , 即为  $(\Delta z/f)_1$ ,  $(\Delta z/f)_2$  和  $(\Delta z/f)_3$  中之一。

## 2 数值计算及分析

利用(1)式, 我们对入射场振幅作了计算结果, 如图1所示; 余弦高斯光束在自由空间传输时,  $x$  方向的光强变化如图2所示; 余弦高斯光束聚焦后轴上的光强分布作计算结果, 如图3、图4所示。为保证计算结果的正确性, 对于轴上的

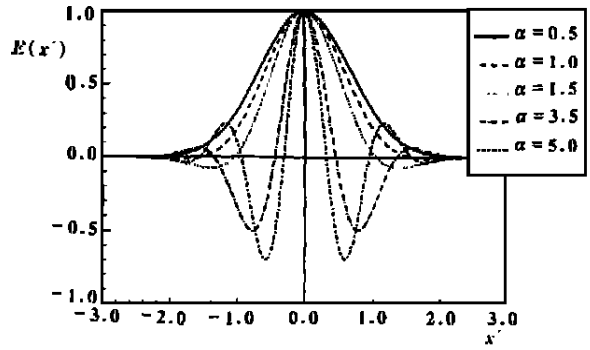


Fig. 1 The field distribution  $E(x')$  of cosine Gaussian beams at the plane of  $z = 0, x' = x/\omega_0$

最大光强进行计算时分别还使用了(11)式、(12)式及(13)式~(15)式作校核, 得到了一致的结果。由图1可以看出, 当  $\alpha$  较小时, 场振幅分布  $E(x/\omega_0)$  的正负值关于  $E = 0$  不相等, 当  $\alpha = 0$  时, 余弦高斯光束约化为基模高斯光束; 随  $\alpha$  的增大, 场振幅分布  $E(x/\omega_0)$  的正负值关于  $E = 0$  的不相等程度越来越小。场分布决定了轴上光强的分布特性。由图2可以看出, 对于不同的传输距离  $z(N_w)$ , 其横断面的光强分布不同, 这说明余弦高斯光束在自由空间的传输不保持其形状不变。由(11)式可以看出, 轴上光强分布由菲涅耳数  $N_f$  及调制参数  $\alpha$  共同决定; 当  $\alpha$  较大时, 轴上光强为 0, 其原因是, 随  $\alpha$  的增大, 场振幅分布  $E(x/\omega_0)$  的正负值关于  $E = 0$  越来越接近, 致使轴上的光强越来越小。由图3、图4及解析式可以看出, 相对焦移  $|\Delta f/f|$  是菲涅耳数  $N_f$  和调制参数  $\alpha$  的函数; 在相同的菲涅耳数  $N_f$  情况下, 调制参数  $\alpha$  越大, 焦移也越大,  $\alpha = 0$  (基模高斯光束) 时, 焦移最小, 如图3所示; 在调制参数  $\alpha$  不变的情况下,  $N_f$  越小, 相对焦移  $|\Delta f/f|$  越大, 如图4所示。在特定的  $N_f$  和  $\alpha$  情况下, 即  $\delta < 0$  时, 轴上光强分布会有 3

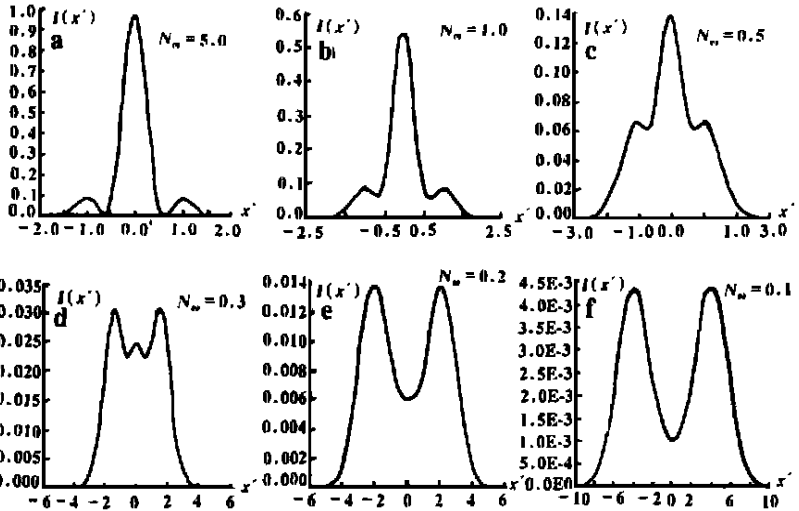


Fig. 2 Intensity distribution  $I(x')$  of a cosine-Gaussian beams propagating in free space,  $\alpha = 2.5, x' = x/\omega_0$

个极值出现, 两个极大值和一个极小值, 如图 3b 和图 4b 所示。就计算的参数而言, 极大值中, 一个位于几何焦点的左侧, 另一个位于几何焦点的右侧, 极小值位于两个极大值之间, 但轴上光强最大值(对应于实际焦点位置)总是位于几何焦点左侧。

### 3 结束语

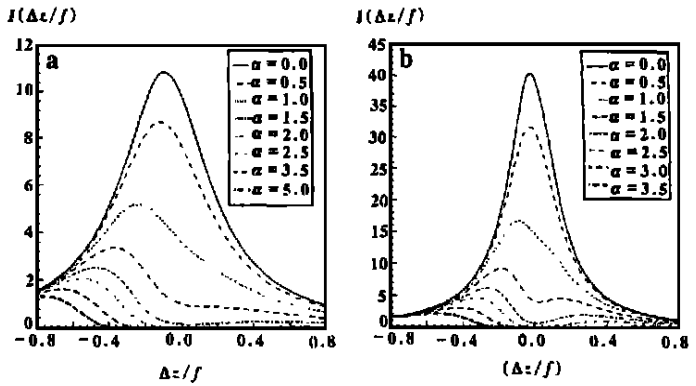


Fig. 3 The axial intensity distributions  $I(\Delta z/f)$  of focused cosine Gaussian beams a- $N_f = 1.0$  b- $N_f = 2.0$

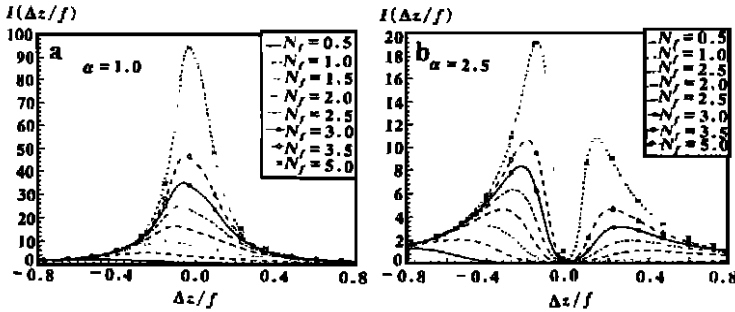


Fig. 4 The axial intensity distributions  $I(\Delta z/f)$  of focused cosine-Gaussian beams

我们对轴上光强分布进行了计算和分析。轴上光强分布及焦移由菲涅耳数和调制参数共同决定。注意到余弦高斯光束是在传输中不能保持其形状不变的一类光束。选择合适的调制参数  $\alpha$ , 可在空间某处得到近平顶分布的光束<sup>[6]</sup>, 因此, 可望在某些实际工作中得到应用。

### 参 考 文 献

- 1 Casperson L W, Hall D G. J O S A, 1977; A14: 3341~ 3348
- 2 Casperson L W, Tovar A A. J O S A, 1998; A15:954~ 961
- 3 Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1998; A15: 2425~ 2432
- 4 Collins S A. J O S A, 1970; 60: 1168~ 1177
- 5 Erdelyi A. Tables of integral T transforms. New York: McGraw-Hill, 1954
- 6 L B D, Ma H, Zhang B. Opt Commun, 1999; 164: 165~ 170

作者简介: 王喜庆, 男, 1959 年 9 月出生。副教授, 在读博士。主要从事激光传输变换等研究。

收稿日期: 2000-02-18 收到修改稿日期: 2000-07-11

我们给出了余弦高斯光束在无光阑情况下通过 ABCD 光学系统的一般表达式, 并说明了其在自由空间传输时, 不能保证其形状不变性; 给出了余弦高斯光束通过薄透镜系统时场分布函数、轴上光强分布及相对焦移的解析