兵器激光

·材料和元件· 1986年第3期

非均匀薄膜的一些基本性质

张 沆 周九林

一、引 言

从严格意义上讲，任何薄膜都有一定程度的非均匀性。对非均匀薄膜的研究，虽然在五十年代就曾引起人们的注意，但由于数学处理的繁难，以及制备技术上的原因，非均匀薄膜并没有得到广泛的研究和应用。目前随着计算机的发展和薄膜镀制技术的成熟，非均匀薄膜将成为薄膜光学的一个可资开拓的领域。

对于一维非均匀薄膜，由于折射率随厚度按一定的函数关系变化，这给薄膜带来新的特性，并使膜系设计增添了新的可调整的参数，必将演绎出许多新的膜系。

本文对一维非均匀薄膜的基本性质作了初步探讨。

二、一维非均匀薄膜波动方程解

假设平面电磁波在无限大的无吸收的媒质中沿z轴传播，如图1所示。在所讨论的区域0～h中，媒质折射率沿Z方向按指数规律变化

$$n(z)=n(0)e^{\rho z} \quad (1)$$

则电矢量和磁矢量的复振幅必定满足波动方程[1]

$$d^2u/dZ^2+k^2n^2u=0 \quad (2)$$

式中，u为电矢量或磁矢量振幅，k为波数。由方程（1）、（2）可得

$$d^2u/dZ^2+k^2n^2(0)e^{2\rho z}=0 \quad (3)$$

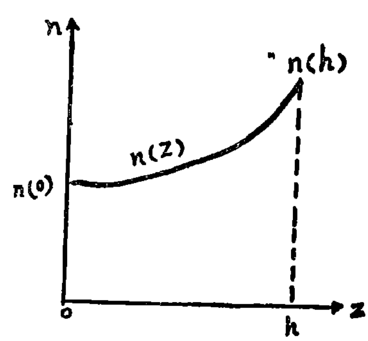

图1

将（3）式与《常微分方程手册》[2]中标准方程比较，可知方程（3）属于变态贝塞耳方程。求解此方程可得到一般解为

$$\left.\begin{aligned}E(Z)&=C_1J_0\left[\frac{k}{\rho}n(Z)\right]+C_2Y_0\left[\frac{k}{\rho}n(Z)\right]\\H(Z)&=-in(Z)\left\{C_1J_1\left[\frac{k}{\rho}n(Z)\right]+C_2Y_1\left[\frac{k}{\rho}n(Z)\right]\right\}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

收稿日期：1985年12月18日。

式中，C_1、C_2为常数，J_0、J_1、Y_0、Y_1分别为零阶和一阶的第一类、第二类贝塞耳函数。

代入边界条件

$Z=0$
$$\begin{cases} E_0 = C_1 J_0(\alpha) + C_2 Y_0(\alpha) \\ H_0 = -in(0)[C_1 J_1(\alpha) + C_2 Y_1(\alpha)] \end{cases} \tag{5}$$

$Z=h$
$$\begin{cases} E_h = C_1 J_0(\varepsilon\alpha) + C_2 Y_0(\varepsilon\alpha) \\ H_h = -in(h)[C_1 J_1(\varepsilon\alpha) + C_2 Y_1(\varepsilon\alpha)] \end{cases} \tag{6}$$

从方程组（5）、（6）中消去C_1和C_2，则有
$$\begin{cases} E_0 = aE_h + i/n(h) \cdot bH_h \\ H_0 = in(0)gE_h + f \cdot H_h/\varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

式中，
$$\alpha = kn(0) \cdot h/\ln\varepsilon = \frac{2\pi n(0)}{\ln\varepsilon} \cdot \frac{h}{\lambda}$$

$$\varepsilon = n(h)/n(0)$$

$$a = \frac{Y_0(\alpha)J_1(\varepsilon\alpha) - J_0(\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha)}{Y_0(\varepsilon\alpha)J_1(\varepsilon\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha)} \tag{8}$$

$$b = \frac{J_0(\alpha)Y_0(\varepsilon\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_0(\alpha)}{Y_0(\varepsilon\alpha)J_1(\varepsilon\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha)} \tag{9}$$

$$g = \frac{J_1(\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha) - J_1(\varepsilon\alpha)Y_1(\alpha)}{Y_0(\varepsilon\alpha)J_1(\varepsilon\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha)} \tag{10}$$

$$f = \frac{Y_0(\varepsilon\alpha)J_1(\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_1(\alpha)}{Y_0(\varepsilon\alpha)J_1(\varepsilon\alpha) - J_0(\varepsilon\alpha)Y_1(\varepsilon\alpha)} \tag{11}$$

根据基本方程组（7）可得此类非均匀薄膜的特征矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{i}{n(h)}b \\ in(0)g & f/\varepsilon \end{pmatrix} \tag{12}$$

如果媒质的折射率分布如图 2 所示，即
$$n(Z) = n(0)e^{-\rho z}$$
与前述推导比较，很容易得到变化关系
$$\alpha \to -\varepsilon\alpha$$
$$\varepsilon\alpha \to -\alpha$$
由贝塞耳函数性质[3]
$$J_n(-\alpha) = (-1)^n J_n(\alpha)$$
$$J_n(\alpha)Y_n'(\alpha) - J_n'(\alpha)Y_n(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha}$$

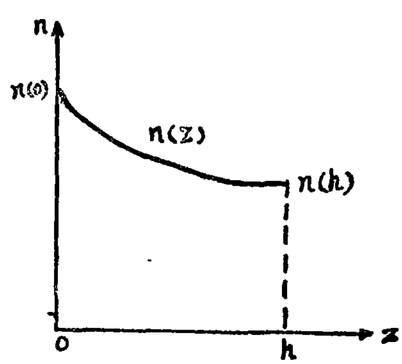

图 2

可以得到

$$
\begin{cases}
J_0(-\alpha)=J_0(\alpha) \\
Y_0(-\alpha)=Y_0(\alpha) \\
J_1(-\alpha)=-J_1(\alpha) \\
Y_1(-\alpha)=-Y_1(\alpha)
\end{cases} \tag{13}
$$

以及

$$
J_1(\alpha)Y_0(\alpha)-J_0(\alpha)Y_1(\alpha)=-\frac{2}{\pi\alpha} \tag{14}
$$

将以上五个关系式代入特征矩阵的表示式，可得图 2 所示的非均匀薄膜的特征矩阵为

$$
M=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} f & \frac{i}{n(0)}b \\ in(h)g & \varepsilon a \end{pmatrix} \tag{15}
$$

三、非均匀薄膜的几个基本性质

1.特征矩阵的行列式值为 1

众所周知，均匀薄膜的特征矩阵的行列式值等于1。若将非均匀薄膜看成是由许多层 薄的均匀膜叠加组成，则非均匀膜的特征矩阵便是由许多个行列式值为 1 的二阶矩阵的乘积，所以非均匀薄膜特征矩阵的行列式值亦为1。关于这一点，我们可以从数学上加以证明。

利用（12）式，可以得到

$$
\begin{aligned}
\det M &= a\cdot f/\varepsilon+n(0)\cdot b\cdot g/n(h) \\
&=(af+bg)/\varepsilon
\end{aligned}
$$

将（8）、（9）、（10）、（11）式代入上式，再利用（13）、（14）式，可以得到

$$
\det M=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\pi\varepsilon\alpha}{2}\right)^2\left[J_1(\alpha)Y_0(\alpha)-J_0(\alpha)Y_1(\alpha)\right]\cdot\left[J_1(\varepsilon\alpha)Y_0(\varepsilon\alpha)-J_0(\varepsilon\alpha)\,Y_1(\varepsilon\alpha)\right]=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\pi\varepsilon\alpha}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{\pi\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\pi\varepsilon\alpha}\right)=1
$$

这便从数学上论证了这一性质。我们利用IBM-PC微型机从数字计算上也证明了这 一基本性质。

2.反射相移

将图 1 所示的非均匀薄膜，镀在折射率为n_s的基片上，则膜系的特征矩阵为

$$
\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ n_s \end{bmatrix}
$$

反射系数 $r\ \dfrac{n_0-C/B}{n_0+C/B}=|r|\,e^{i\varphi}$

容易得到反射相位

$$
\varphi=\operatorname{arctg}\left[\frac{2n_0(n_s^2M_{12}M_{22}-M_{11}M_{21})}{n_0^2(M_{11}^2+M_{12}^2n_s^2)-(M_{22}^2n_s^2+M_{21}^2)}\right] \tag{16}
$$

利用IBM-PC微机编程序计算，得到$\varphi\sim\lambda$曲线，同时计算出相应的均匀薄膜情况， 作为

比较。曲线如图 3 所示。

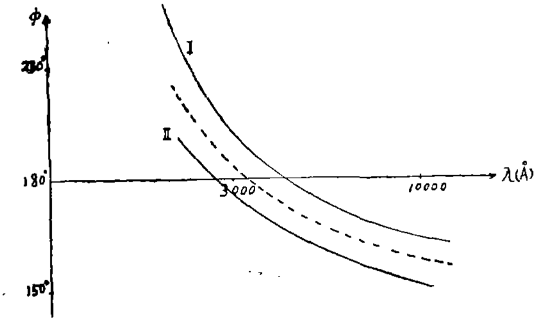

图 3　虚线对应均匀薄膜情形，实线 I 对应图 1 所示情形，实线 II 对应图 2 所示情形

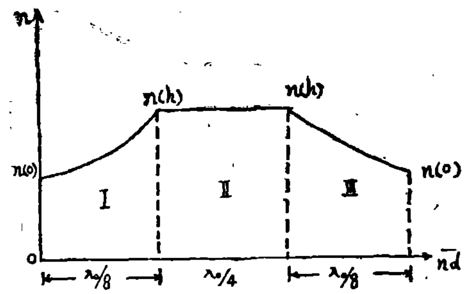

图 4

均匀薄膜的折射率为$n=2.3$，光学厚度为$\lambda_0/4$；非均匀薄膜则如图1、图2所示，取$n(0)=1.8$，$n(h)=2.3$，平均光学厚度$\overline{nd}=\lambda_0/4$；$\lambda_0=5300\text{Å}$。

从图 3 的曲线不难看出，单层非均匀薄膜的反射相移与均匀薄膜比较，相当于中心波长有所偏移，曲线形状很相似。

3.三层对称非均匀组合膜

薄膜系统的结构如图4所示。

折射率分布为：

$$\begin{cases} n(Z)=n(0)e^{\rho z} & (\text{I 区}) \\ n(Z)=n=n(h) & (\text{II 区}) \\ n(Z)=n(h)e^{-\rho z} & (\text{III 区}) \end{cases}$$

对于这种三层组合膜，其特征矩阵为

$$\mu=M_1\cdot M_2\cdot M_3$$

利用 (12)、(15) 式有

$$\mu=\begin{pmatrix} a & \frac{i}{n(h)}b \\ in(0)g & \frac{f}{\varepsilon} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\delta_2 & i\sin\delta_2/n(h) \\ in(h)\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f & \frac{i}{n(0)}b \\ in(h)g & \varepsilon a \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\varepsilon}$$

$$=\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$$

进行一系列化简后

$$\mu_{11}=\mu_{22}=\frac{1}{\varepsilon}af\ \cos\delta_2-\frac{1}{\varepsilon}\cdot bf\ \sin\delta_2-\frac{1}{\varepsilon}ag\ \sin\delta_2-\frac{1}{\varepsilon}bg\ \cos\delta_2$$

且：μ_{12}、μ_{21}为纯虚数

根据前述性质，有$\det\mu=1$，即$\mu_{11}{}^2+\mu_{12}\cdot\mu_{21}=1$，故可用三角函数来表示为

$$\mu=\begin{bmatrix}\cos\gamma & i\sin\gamma/E\\ iE\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\tag{17}$$

与均匀薄膜情形比较，可知均匀三层对称膜系的等效折射率概念可以运用于非均匀三层对称膜系，即（17）式中的$E=\sqrt{\mu_{21}/\mu_{12}}$为等效折射率，$\gamma$为等效相位厚度。容易证明这个结论能够推广到由任意多层非均匀膜组成的对称膜系，这给多层非均匀膜的计算带来很大的方便。

利用上述理论推导的结果，计算出膜系组构为图4所示的具体例子的等效折射率E，并与均匀对称组合膜情况比较。均匀三层对称膜组构如图5所示。

取$n(0)=1.8$，$n(h)=2.3$，中心波长$\lambda_0=5300\text{Å}$。

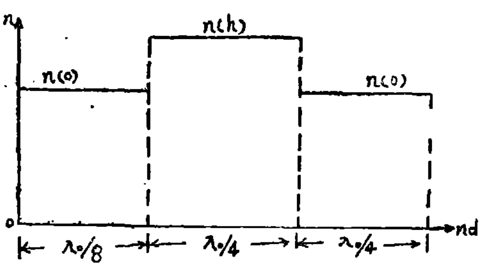

图 5

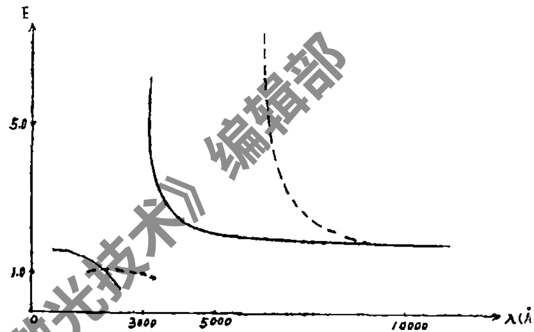

图 6　虚线为均匀薄膜情况

计算出的E～λ曲线如图6所示。从曲线形状不难看出，均匀膜情况的反射带远远大于非均匀膜情况，即非均匀膜组构的透明区比均匀组构的大许多。

四、结　　语

对非均匀薄膜的研究，我们的工作只是初步的，在这方面还有大量的工作需要去做。

参 考 文 献

［1］ M·玻恩　E·沃耳夫著，杨葭荪等译校，《光学原理》，科学出版社，1978年，第33页。

［2］ E·卡姆著，张鸿林译，《常微分方程手册》，科学出版社，1980年，第463页。

［3］ 《数学手册》，人民教育出版社，1979年，第636页。