激光基础讲座（2）

光在各向异性媒质中传播的特点

华东工程学院　　王其祥

光在各向异性媒质中传播时，具有什么特点呢？这是研究晶体的光学性质时，所必须回答的基本问题之一。本文将从光的电磁理论出发，通过对各向异性媒质中麦克斯韦方程组解的讨论分析，来回答这个问题。

在光学透明媒质中，麦克斯韦方程组取如下形式：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{D}=0 & (1)\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & (2)\\ \nabla\times\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & (3)\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & (4)\end{cases}$$

这个结果，是由麦克斯韦方程组的普遍式中，令传导电流密度 $j_c=0$ 和自由电荷体密度 $\rho_e=0$ 而得到。如果将该方程组用于各向异性媒质，则当坐标系 xyz 的轴取媒质的主轴方向时，各场量之间存在如下形式的物质方程：

$$\begin{bmatrix} D_x\\ D_y\\ D_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H} \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{D}=\{D_x,\ D_y,\ D_z\} \tag{7}$$

$$\mathbf{E}=\{E_x,\ E_y,\ E_z\} \tag{8}$$

若引入符号

$$\varepsilon_{rj}=\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}\qquad (j=x,\ y,\ z) \tag{9}$$

则可以把（5）式改写为

$$\begin{bmatrix} D_x\\ D_y\\ D_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_0\varepsilon_{rx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0\varepsilon_{ry} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0\varepsilon_{rz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{10}$$

收稿日期：1980年6月23日。

我们只须研究，平面单色波在各向异性媒质中传播的特点。事实上对于非平面单色波，我们可以应用福里哀分析的方法，将它表示成一系列平面单色波的线性组合。因而可以假定，在我们的讨论中，光波的场量E、D、H、B均取如下形式：

$$\mathbf{A}(r,\ t)=\mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})} \tag{11}$$

这是平面单色波的波动方程的解。事实上若令方程中的位相因子为δ，则等位面方程为

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t=\delta \tag{12}$$

其中K为波矢量，r为矢径：

$$\mathbf{K}=\left\{K_x,\ K_y,\ K_z\right\}$$

$$\mathbf{r}=\left\{x,\ y,\ z\right\}$$

把上两式代入等位面方程，即得

$$K_x x+K_y y+K_z z-\omega t=\delta \tag{13}$$

这是一个以t为参变量的平面方程。这个平面，就是在t时刻与位相因子δ对应的波面。根据公式（13）所给出的平面方程，由空间解析几何的知识可知，这个平面的法线矢量，就是K矢量。由此可见，K矢量的确和光波的等位面垂直。故K矢量的方向，就是等位面的传播方向。由波动方程可知，K矢量的大小，可以由下列公式来计算：

$$K=\frac{\omega}{v} \tag{14}$$

其中ω为光波的圆频率，v为等位面的传播速度，也叫相速度。

注意到光能量的传播方向，就是乌莫夫-坡印亭矢量S的方向，其中

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{15}$$

于是就提出了一个很重要的问题：对于各向异性的媒质来说，光波的等位面传播方向K和光能量的传播方向S，两者是否一致？下面就来分析这个问题。

先将公式（11）代入麦氏方程组，用以考察：当平面单色波的波动方程为麦氏方程组的解时，其场量A（r，t）有什么特点？

若把（11）式中的A看成H，则得

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0 e^{-i[\omega t-(K_x x+K_y y+K_z z)]} \tag{16}$$

将上式两端分别对三个坐标轴进行投影，可得

$$\begin{cases} H_x=H_{0x}\,e^{-i[\omega t-(K_x x+K_y y+K_z z)]} \\ H_y=H_{0y}\,e^{-i[\omega t-(K_x x+K_y y+K_z z)]} \\ H_z=H_{0z}\,e^{-i[\omega t-(K_x x+K_y y+K_z z)]} \end{cases} \tag{17}$$

因此有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial H_z}{\partial y}=iK_yH_z\\[2ex]
\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=iK_xH_z\\[2ex]
\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=iK_yH_x\\[2ex]
\dfrac{\partial H_x}{\partial z}=iK_zH_x\\[2ex]
\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=iK_zH_y\\[2ex]
\dfrac{\partial H_y}{\partial x}=iK_xH_y
\end{cases}
$$

把上列结果代入，即得

$$
\nabla\times\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ K_x & K_y & K_z\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=i\mathbf{K}\times\mathbf{H} \tag{18}
$$

如果把（11）式中的**A**看成**D**，则有

$$
\mathbf{D}=\mathbf{D}_0e^{-i[\omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}]} \tag{19}
$$

由此得

$$
\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{D} \tag{20}
$$

把（18）、（20）两式代入（3）式，即得

$$
-\mathbf{K}\times\mathbf{H}=\omega\mathbf{D} \tag{21}
$$

仿照公式（18）和（20），可得

$$
\nabla\times\mathbf{E}=i\mathbf{K}\times\mathbf{E} \tag{22}
$$

$$
-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=i\omega\mathbf{B}=i\mu_0\omega\mathbf{H} \tag{23}
$$

把上两式代入公式（4），即得

$$
\mathbf{K}\times\mathbf{E}=\omega\mu_0\mathbf{H} \tag{24}
$$

综上所述，可以看出，满足麦氏方程组的平面单色波，各场量之间，有如下形式的函数关系：

$$
\begin{cases}
\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}\\
-\mathbf{K}\times\mathbf{H}=\omega\mathbf{D}\\
\mathbf{K}\times\mathbf{E}=\mu_0\omega\mathbf{H}
\end{cases}
$$

根据矢积定义，由上列三式可知：$\mathbf{S}\perp\mathbf{E}$，$\mathbf{S}\perp\mathbf{H}$，$\mathbf{D}\perp\mathbf{K}$，$\mathbf{D}\perp\mathbf{H}$，$\mathbf{H}\perp\mathbf{K}$，$\mathbf{H}\perp\mathbf{E}$。由于**S**、**K**、 D、E 这四个矢量均和H垂直，所以它们是共面矢量，均在垂直于矢量H的平面内。注意到这四个共面矢量，还满足S⊥E、K⊥D，故E和D的夹角与S和K的夹角相等，即

$$(\hat{E, D})=(\hat{S, K})=\alpha \tag{25}$$

通常把α叫做离散角，如图 1 所示。

这就证明了：对于单色平面波来说，如果在各向异性媒质中，矢量 D与E 不重合，两者有一个离散角α，则K与S也一定不重合，两者的夹角也是 α；不然，则反之。

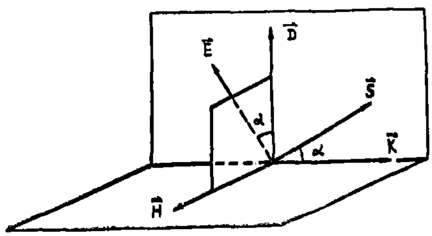

图 1

下面进而研究：在各向异性媒质中，光的传播速度的大小，和光的传播方向有什么关系？这个问题，就是所谓光速的各向异性问题；它和折射率的各向异性，是相对应的。

由（14）式得

$$K=\frac{\omega}{v}=\frac{\omega}{c}\cdot\frac{c}{v}=\frac{\omega}{c}n \tag{26}$$

若把K的单位矢量记为N，则有

$$K=\frac{\omega}{c}n\,N \tag{27}$$

将上式代入公式（21）和（24），并整理之，得

$$-N\times H=\frac{c}{n}D \tag{28}$$

$$H=\frac{n}{c\mu_0}N\times E \tag{29}$$

将（29）式所示的H表达式代入（28）式，可得

$$N\times(N\times E)=-\frac{c^2\mu_0}{n^2}D \tag{30}$$

利用矢量恒等式

$$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$$

将（30）式展开，并且注意到$N\cdot N=1$，即得

$$D=\frac{n^2}{c^2\mu_0}[E-N(N\cdot E)] \tag{31}$$

由上式向三个坐标轴投影，并注意到

$$D=\left\{D_x,\ D_y,\ D_z\right\}$$

$$E=\left\{\frac{D_x}{\varepsilon_0\varepsilon_{rx}},\ \frac{D_y}{\varepsilon_0\varepsilon_{ry}},\ \frac{D_z}{\varepsilon_0\varepsilon_{rz}}\right\}$$

$$N=\{N_x,\ N_y,\ N_z\}$$

便可得到三个相应的代数方程：

$$\begin{cases} D_x=\dfrac{n^2}{c^2\mu_0}\left[\dfrac{D_x}{\varepsilon_0\varepsilon_{rx}}-N_x(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})\right] \\ D_y=\dfrac{n^2}{c^2\mu_0}\left[\dfrac{D_y}{\varepsilon_0\varepsilon_{ry}}-N_y(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})\right] \\ D_z=\dfrac{n^2}{c^2\mu_0}\left[\dfrac{D_z}{\varepsilon_0\varepsilon_{rz}}-N_z(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})\right] \end{cases}$$

从上列三式中，分别解出D_x，D_y，D_z，并注意到

$$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0},$$

即得

$$\begin{cases} D_x=\dfrac{-\dfrac{1}{c^2\mu_0}N_x(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{rx}}} & (32) \\ D_y=\dfrac{-\dfrac{1}{c^2\mu_0}N_y(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{ry}}} & (33) \\ D_z=\dfrac{-\dfrac{1}{c^2\mu_0}N_z(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{rz}}} & (34) \end{cases}$$

由于D⊥K，N是K的单位矢量，所以D⊥N，即得

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{N}=0$$

或

$$D_xN_x+D_yN_y+D_zN_z=0 \tag{35}$$

将（32)～(34）式代入，并约去公因子，即得

$$\frac{N_x^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{rx}}}+\frac{N_y^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{ry}}}+\frac{N_z^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{\varepsilon_{rz}}}=0 \tag{36}$$

这就是著名的菲涅耳方程。它给出了单色平面波在各向异性媒质中传播时，与相速度v对应**的折射率n，和**等位面的传播方向N，两者之间必须满足的条件。事实上对于一定的媒质，当**主轴方向选定后，**ε_{rx}、ε_{ry}、ε_{rz}都是已知量。故当等位面的传播方向N给出时，亦即当N_x、N_y、N_z**给出时，可以从方程**中解出n来。所以说，方程给出了N与n的对应关系，而n又与v一一对应，所以，方程实际上给出了光速各向异性的规律。这里的光速，自然是指等位面在媒质中的传播速度。

注意到方程通分后，分子是n^2的二次式。故方程对n^2只有两个独立的根，设为ξ'和ξ''，则得

$$n=\pm\sqrt{\xi'},\quad \pm\sqrt{\xi''}$$

但由于负折射率没有意义，所以有意义的根只有两个，即$n'=\sqrt{\xi'}$，$n''=\sqrt{\xi''}$。两个n值，对应着两种相速度。

由此可见，菲涅耳方程告诉我们，光在各向异性媒质中传播时，对应于同一个等位面的传播方向N，可以有两种不同的相速度v'和v''，其中

$$v'=\frac{c}{n'},$$

$$v''=\frac{c}{n''},$$

每一种相速度对应着一种线偏振光。这两种线偏振光，其D矢量的方向，可由将n'和n''代入公式（32）～(34）来确定。而且我们还可以证明，这两束线偏振光，其电矢量$\mathbf{D}'$和$\mathbf{D}''$相互垂直。为此，只须证明

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{D}''=0$$

或

$$D_x'D_x''+D_y'D_y''+D_z'D_z''=0 \tag{37}$$

事实上将公式（32）～(34）代入上式，并整理之，即得

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{D}''=\left(\frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}}{c^2\mu_0}\right)^2\left\{\frac{N_x^2}{\left[\frac{1}{\varepsilon_{rx}}-\frac{1}{n'^2}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_{rx}}-\frac{1}{n''^2}\right]}+\frac{N_y^2}{\left[\frac{1}{\varepsilon_{ry}}-\frac{1}{n'^2}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_{ry}}-\frac{1}{n''^2}\right]}+\frac{N_z^2}{\left[\frac{1}{\varepsilon_{rz}}-\frac{1}{n'^2}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_{rz}}-\frac{1}{n''^2}\right]}\right\} \tag{38}$$

由于

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon_{rj}}-\frac{1}{n'^2}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_{rj}}-\frac{1}{n''^2}\right]}=\frac{n'^2\,n''^2}{n''^2-n'^2}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{rj}}-\frac{1}{n'^2}}-\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{rj}}-\frac{1}{n''^2}}\right\}$$

其中j=x，y，z，所以将上列结果代入（38）式，即得

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{D}''=\left(\frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}}{c^2\mu_0}\right)^2\frac{n'^2\,n''^2}{n''^2-n'^2}\left\{\left[\frac{N_x^2}{\frac{1}{\varepsilon_{rx}}-\frac{1}{n'^2}}+\frac{N_y^2}{\frac{1}{\varepsilon_{ry}}-\frac{1}{n'^2}}+\frac{N_z^2}{\frac{1}{\varepsilon_{rz}}-\frac{1}{n'^2}}\right]-\left[\frac{N_x^2}{\frac{1}{\varepsilon_{rx}}-\frac{1}{n''^2}}+\frac{N_y^2}{\frac{1}{\varepsilon_{ry}}-\frac{1}{n''^2}}+\frac{N_z^2}{\frac{1}{\varepsilon_{rz}}-\frac{1}{n''^2}}\right]\right\}$$

因为n'和n''都是菲涅耳方程的根，所以上式中方括号内之和均为0，故有

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{D}''=0$$

这就证明了，等位面朝同一个$\mathbf{N}$方向传播的、但相速度不同的两束线偏振光，其电矢量$\mathbf{D}'$和$\mathbf{D}''$必相互垂直。

综上所述，可以知道，光在光学各向异性媒质中传播时，有如下几个特点：

1、矢量$\mathbf{E}$、$\mathbf{D}$、$\mathbf{S}$、$\mathbf{K}$共面，它们均与$\mathbf{H}$矢量垂直，且有

$$(\mathbf{E}\hat{,}\mathbf{D})=(\mathbf{S}\hat{,}\mathbf{K})=\alpha,$$

其中α为离散角。

2、光波相速度v的方向余弦N_x、N_y、N_z、与相速度对应的媒质的折射率n，它们之间必满足菲涅耳方程。菲涅耳方程由公式(36)给出。

3、由菲涅耳方程可知，对应于同一个等位面的传播方向N_x、N_y、N_z，可以有两种大小不同的相速度v'和v''。每一种相速度，对应着一种线偏振光。这两种线偏振光的电矢量$\mathbf{D}'$和$\mathbf{D}''$，相互垂直。

这些基本结论，为处理光在光学各向异性晶体中传播的有关问题，提供了理论根据。

（上接第63页）

表1　几种军用激光器的性能特点

用途	激光器	波长（微米）	功率	重复频率（次/秒）	可测距离（公里）	测量精度（米）
近程	砷化镓	0.84（低温） 0.91（室温）	100瓦		30米～6	～1
中程	钕玻璃 YAG	1.06 1.06	几～几十（兆瓦）	每分几次 几百次	几～几十	≥±1 ≥±1
远程	二氧化碳（CO）	10.6	15千瓦	1万次	～100	25厘米（位相）